

Mathematik I M WM Übungen WS 2010/11

1. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie mit einer Wahrheitstabelle, ob die logischen Ausdrücke

$$(a \leftrightarrow (b \wedge \neg a)) \vee ((b \rightarrow \neg b) \wedge b) \quad \text{und} \quad (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow ((\neg b \rightarrow a) \rightarrow b)$$

immer wahr, immer falsch oder abhängig von den Variablen wahr oder falsch sind.

2. Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig? Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und zu falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an!

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{und} \quad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$$

3. Gegeben seien die Mengen $A = \{2, 5, 8\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times A$ und $(A \times B) \setminus (B \times B)$!

4. Formulieren Sie die folgenden Aussagen und deren Verneinung in formaler Schreibweise unter Verwendung von Quantoren:

- (a) Jede reelle Zahl ist höchstens so groß wie ihr Quadrat.
- (b) Es gibt eine größte negative reelle Zahl.
- (c) Zwischen je zwei natürlichen Zahlen liegt eine reelle Zahl.

5. Gegeben seien die Funktionen f und g mit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 + x & g(x) &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

Bilden Sie (falls möglich) die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$.

6. Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{4x-5}{x^2-1}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D in \mathbb{R} und die Wertemenge der Funktion. Ist die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv? Bestimmen Sie die Umkehrabbildung (falls möglich) mit geeignetem Wertebereich.

7. Es sei $f(x) = 6x + 1$ und $g(x) = (x + 3)^2 - 2$. Berechnen Sie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g sowie die Verknüpfung $f \circ g$ und $g \circ f$.

8. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum (falls möglich) der nachfolgenden Mengen reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima?

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x = 3^n\}$

(c) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

9. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{|x-2|} \geq \frac{4x+5}{x-3} \quad ?$$

10. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die

$$\frac{|x-2|(x+2)}{x} < |x|$$

gilt.