

Mathematik I M WM Übungen 2. Übungsblatt

10. Formulieren Sie die folgenden Aussagen und deren Verneinung in formaler Schreibweise unter Verwendung von Quantoren:

- (a) Zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.
- (b) Es gibt eine kleinste positive reelle Zahl.

11. Formalisieren Sie die folgenden Sätze und verneinen Sie sie!

- (a) Alle Studenten, die fleißig lernen, erhalten ein positives Zeugnis
- (b) Wenn alle Menschen friedlich zu einander sind, dann gibt es keine Kriege.

12. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (5 + 5i)z + 2 + 11i = 0$ über den komplexen Zahlen!

13. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

14. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Ungleichungen genügen

$$|z - 1| \leq |z + i| \leq |z + 1|$$

und skizzieren Sie das Ergebnis in der Gauß'schen Zahlenebene!

15. Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D in \mathbb{R} und die Wertemenge der Funktion. Ist die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv? Bestimmen Sie die Umkehrabbildung (falls möglich) mit geeignetem Wertebereich.

16. Es sei $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = (x - 1)^2 + 4$. Berechnen Sie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g sowie die Verknüpfung $f \circ g$ und $g \circ f$.

17. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum (falls möglich) der nachfolgenden Mengen reeller Zahlen. Sind diese auch Maxima und Minima?

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x = 3^n\}$

18. Gegeben sind die vier Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch P_2, P_3 und P_4 in parameterfreier Form und berechnen Sie den Abstand des Punktes P_1 von dieser Ebene. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks $P_2P_3P_4$

19. Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene F durch den Punkt

$$R = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und durch die Gerade

$$g : X = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die beiden Ebenen E und F parameterfrei an!
- (b) In welchem Punkt durchstößt die Gerade g die Ebene E ?
- (c) Wie lautet die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F ?