Mathematik I M WM Übungen   12. Übungsblatt

87. Betrachten Sie den Unterraum U des $\mathbb{R}^3$, der durch die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

(a) Ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von U? Welche Dimension hat U? Ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Stellen Sie $w_1 = (2, -2, 3)^t$ als Linearkombination von u_1, u_2 und u_3 dar.

88. Gegeben sind die Vektoren:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1, -1, -1, 2)^t \\ x^{(2)} &= (-1, 2, 3, 1)^t \\ x^{(3)} &= (2, -3, -3, 2)^t \\ x^{(4)} &= (1, 1, 1, 6)^t \end{aligned}$$

(a) Sind die Vektorn $x^{(1)}$ bis $x^{(4)}$ linear unabhängig?

(b) Lässt sich der Vektor $x^{(4)}$ als Linearkombination der Vektoren $x^{(1)}$ bis $x^{(3)}$ darstellen? Und wenn ja, wie?

89. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

90. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2 - 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

(a) keine Lösung,

(b) eine eindeutig bestimmte Lösung,

(c) beliebig viele Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die Lösungsmenge an.

91. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3a \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ a^2 - 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} a - 4 \\ a + 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ?

92. Bestimmen Sie alle a, $b \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+1 & 10 \\ 3 & 2a & b+12 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

93. Bestimmen Sie die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter λ.

94. Berechnen Sie mittels verschiedener Methoden $\det A$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

95. Bestimmen Sie $\det A$ für

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$.