1. a. (Gruppe A) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+4}} \qquad ?$$

Lösung.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Laut Leibnizkriterium konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ mit $a_n \geq 0$, falls a_n eine monoton fallende Nullfolge ist.
Wir zeigen also: a_n ist eine monoton fallende Nullfolge.

Nullfolge:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}} = 0 \end{aligned}$$

Monotonie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n && \iff \\ \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+4}} &\leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}} && \iff \\ \sqrt{3(n+1)+4} &\geq \sqrt{3n+4} && \iff \\ 3n+3+4 &\geq 3n+4 && \iff \\ 7 &\geq 4 && \text{w.A.} \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe.

b. (Gruppe B) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n+n)}{6^n}\left(x+\frac{3}{2}\right)^n$$

Lösung.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(3^n+n)}{6^n} \\ \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \end{aligned}$$

Die Lösung kann mit jeder der beiden möglichen Formeln berechnet werden.

Variante 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(3^{n+1}+(n+1))}{6^{n+1}}}{\frac{(3^n+n)}{6^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+(n+1))\cdot 6^n}{6^{n+1}\cdot(3^n+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+(n+1))}{6\cdot(3^n+n)} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(n+1)}{3^n+n} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n}+\frac{n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{n}{3^n}} \\
&= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{n}{3^n}+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{n}{3^n}} \qquad (*) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{3+0+0}{1+0} = \frac{1}{6}\cdot 3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(*) Es ist bekannt (vgl. z.B. Übungsblatt 5 Bsp. 39a), dass $\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{a^n} = 0$ für $a>1$, $P(n)$ Polynom.
Daraus folgt: $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
Variante 2:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(3^n+n)}{6^n}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(3^n+n)}}{\sqrt[n]{6^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(3^n+n)}}{6} \\
&= \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n+n)} \qquad (**) \\
&= \frac{1}{6}\cdot 3 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(**) Mittels des Sandwichsatzes (Einzwicksatzes) zeigen wir:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n+n)} = 3$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n)} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n+n)} \le \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n+3^n)}$$

und weiters

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3^n)} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot 3 = 3\cdot 1$$

Daher gilt $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

2. a. (Gruppe B) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x(x+1)}\right).$$

Lösung: Dieser Grenzwert hat die Form $\infty - \infty$. Daher erweitern wir den Bruch und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(x - \sqrt{x(x+1)}\right)\left(x + \sqrt{x(x+1)}\right)}{x + \sqrt{x(x+1)}} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x(x+1))}{x + \sqrt{x(x+1)}}$$

Ingesamt folgt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x(x+1))}{x + \sqrt{x(x+1)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}}$$

Dividiert man nun Nenner und Zähler durch x, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{-1}{2}.$$

b. (Gruppe B) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \ln(3-x)\ln(bx)$$

für alle $b > 0$!

Lösung: Für dieses Beispiel muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

$0 < b < \frac{1}{3}$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3)$ negativ. Der Limes hat also die Form $(-\infty)\cdot k$, wobei k eine negative, reelle Zahl ist. Dieser Grenzwert ist $+\infty$.

$\frac{1}{3} < b$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3)$ positiv. Der Limes hat also die Form $(-\infty)\cdot k$, wobei k eine positive, reelle Zahl ist. Dieser Grenzwert ist $-\infty$.

$b = \frac{1}{3}$: In diesem Fall ist $\ln(b\cdot 3) = 0$. Der Limes hat die Form $(-\infty)\cdot 0$ Das ist eine unbestimmte Form und es muss de l'Hospital angewendet werden:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \ln(3-x)\ln(\frac{x}{3}) &= \lim_{x\to 3} \frac{\ln(3-x)}{\frac{1}{\ln(bx)}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{3-x}}{\frac{-3}{3x\ln(\frac{x}{3})^2}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-\ln(\frac{x}{3})^2}{\frac{3-x}{x}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{-2\frac{\ln(\frac{x}{3})}{x}}{-\frac{3}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{2x\ln(\frac{x}{3})}{3} = 0
\end{aligned}
$$

Dabei wurde von der 1. auf die 2. und von der 3. auf die 4. Zeile de l'Hospital verwendet. Der Grenzwert ist in diesem Fall also 0.

3. (Gruppe B) Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x-5}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema, und deren Typ, Wendepunkte, Verhalten am Rand des Definitionsbereiches und die Asymptoten der Funktion $f(x)$.

Lösung: Die Definitionsmenge sind alle Werte, bei denen der Nenner nicht 0 wird: $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{e^x}{x-5}\right)' \\
&= \frac{e^x(x-5)-e^x}{(x-5)^2} \\
&= \frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2} \\
f''(x) &= \left(\frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2}\right)' \\
&= \frac{e^x(x-5)(x-5)^2 - e^x(x-6)\cdot 2(x-5)}{(x-5)^4} \\
&= \frac{e^x(x^2-12x+37)}{(x-5)^3}
\end{aligned}
$$

- Nullstellen: $\frac{e^x}{x-5} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ wird von keiner reellen Zahl erfüllt. $\Rightarrow$ es gibt keine Nullstelle.
- Extremwerte: $f'(x) = \frac{e^x(x-6)}{(x-5)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 6$. Es gibt einen Extremwert bei $(6|e^6)$.
- Typ: Um den Typ herauszufinden, setzt man in die zweite Ableitung ein: $f''(6) = e^6 > 0 \Rightarrow$ Der Extremwert ist ein Tiefpunkt.

- Wendepunkte: $f''(x) = \frac{e^x(x^2-12x+37)}{(x-5)^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - 12x + 37) = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + 1 = 0$. Das hat in den reellen Zahlen keine Lösung. $\Rightarrow$ Es gibt keinen Wendepunkt.
- Verhalten am Rand:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-5} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x-5} = \infty$$
$$\lim_{x\to 5^-} \frac{e^x}{x-5} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 5^+} \frac{e^x}{x-5} = \infty$$

- Asymptoten: An der Stelle $x = 5$ hat die Funktion eine senkrechte Asymptote. Für $x \to -\infty$ geht die Funktion gegen 0. Daher ist die negative x-Achse eine Asymptote. Für $x \to \infty$ steigt die Funktion so stark an, dass es keine lineare Asymptote geben kann.

4. (Gruppe B) Man ermittle das folgende Integral:

$$\int \frac{e^x}{2\sinh(x) + \cosh(x)} dx$$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{2\sinh(x)+\cosh(x)} dx &= \int \frac{e^x}{2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} dx \qquad \Big/ \cdot \frac{2}{2} \\
&= 2 \cdot \int \frac{e^x}{2e^x - 2e^{-x} + e^x + e^{-x}} dx \\
&= 2 \cdot \int \frac{e^x}{3e^x - e^{-x}} dx \qquad \text{Substitution (*)} \\
&= 2 \cdot \int \frac{u}{3u - \frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{u} du \\
&= 2 \cdot \int \frac{1}{3u - \frac{1}{u}} du \qquad \Big/ \cdot \frac{u}{u} \\
&= 2 \cdot \int \frac{u}{3u^2 - 1} du \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \int \frac{6u}{3u^2 - 1} du \qquad \text{hat die Form } \frac{f'(x)}{f(x)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln(3u^2 - 1) + C \qquad \text{Rücksubstitution} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \ln(3e^{2x} - 1) + C
\end{aligned}$$

(*) Substitution:

$$
\begin{aligned}
u &= e^x \\
\frac{du}{dx} &= e^x \\
dx &= \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}
\end{aligned}
$$