

## Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

40. Zeigen Sie: Jede  $(k + 1) \times (n - k)$  Untermatrix einer  $n \times n$  Permutationsmatrix enthält mindestens einen 1-Eintrag.

Bemerkung: Eine Permutationsmatrix ist eine Matrix  $A$  mit Einträgen  $a_{i,j} \in \{0, 1\}$  und enthält in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen 1-Eintrag.

41. Zeigen Sie: Sei  $r \geq 1$  und  $G = (A \cup B, E)$  ein  $r$ -regulärer bipartiter Graph. Dann lässt sich die Kantenmenge  $E$  in  $r$  disjunkte perfekte Matchings partitionieren.

42. Lösen Sie das Schedulingproblem aus der Vorlesung. Dabei sind drei Jobs auf vier Maschinen zu bearbeiten wobei die Bearbeitungszeiten  $p_{i,j}$  in folgender Matrix gegeben sind:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

43. Beweisen Sie: Sei  $G = (A \cup B, E)$  ein bipartiter Graph, dann gilt

$$\max\{|M| : M \text{ ist ein Matching in } G\} = |A| - \max\{|X| - |N(X)| : X \subseteq A\}$$

44. Hat jeder 3-reguläre Graph ein perfektes Matching?

45. Gegeben sei ein bipartiter Graph  $G = (U \cup V, E)$  mit  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$  und  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$ . Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Knotenüberdeckung zu finden!

46. Das Spiel Slither von Anderson für zwei Spieler geht folgendermaßen: Gegeben ist ein ungerichteter, zusammenhängender und einfacher Graph  $G$ . Die Spieler wählen abwechselnd eine Kante  $e$  nach folgenden Regeln aus:  $e$  wurde noch nicht ausgewählt und die Menge der ausgewählten Kanten inklusive  $e$  bilden einen Weg. Verloren hat der Spieler, der keine Kante mehr auswählen kann.

Zeige: Wenn  $G$  ein perfektes Matching besitzt, dann existiert für den ersten Spieler eine sichere Gewinnstrategie.

47. Finden sie für den Graphen in Abbildung 12 algorithmisch ein Matching maximaler Kardinalität und eine Menge  $S$ , die das Minimierungsproblem in der Tutte-Berge Formel löst.

Beginnen Sie mit dem eingezeichneten Matching!

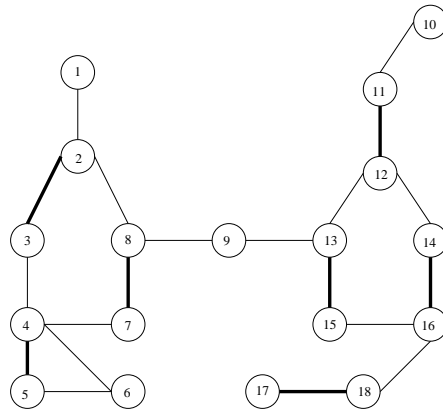


Abbildung 12: MKFP für Aufgabe 47