Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

29. Zeigen Sie die folgende Aussage: Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und f ein Fluss in G. Dann gibt es eine Familie $\mathcal{P}$ von $s-t$-Wegen in G, eine Familie $\mathcal{C}$ von Kreisen in G und Gewichte $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$, so dass $f(e) = \sum_{P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}: e \in E(P)} w(P)$ für alle $e \in E$, $\sum_{P \in \mathcal{P}} w(P) = v(f)$ und $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq |E(G)|$ gilt.

30. Bestimmen Sie algorithmisch einen blockierenden Fluss für den Level-Graphen in Abbildung 8.

31. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk in welchem $G - t$ eine Arboreszenz ist. Entwickeln Sie einen möglichst effizienten Algorihmus zur Bestimmung eines maximalen Flusses. Welche Laufzeit hat der Algorithmus?

32. (a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es k paarweise verschiedene kantendisjunkte Wege von s nach t genau dann, wenn t nach dem Entfernen von $k-1$ beliebigen Kanten weiterhin von s aus erreichbar ist.

    (b) Zeigen Sie die Aussage auch für ungerichtete Graphen!

33. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ mit $(s, t) \notin E$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es k knotendisjunkte Wege von s nach t genau dann, wenn t nach dem Entfernen von $k - 1$ beliebigen Knoten (abgesehen von s und t) weiterhin von s aus erreichbar ist.
    Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 32a.

34. (a) Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 7 mit den Kapazitäten $u(e_1) = u(e_3) = 1$, $u(e_2) = r := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $u(e) = 10$ für alle restlichen Kanten und der Fluss $f(s, 3) = f(3, 2) = f(2, t) = 1$. Zeigen sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson für die Auswahl der folgende drei Wege $P_1 = (s, 1, 2, 3, 4, t)$, $P_2 = (s, 3, 2, 1, t)$ und $P_3 = (s, 4, 3, 2, t)$ in der Reihenfolge $P_1, P_2, P_1, P_3, P_1, P_2, P_1, P_3, \ldots$ nicht terminiert und die Werte der Flüsse nicht gegen den optimalen Flusswert konvergieren.
    Hinweis: Es gilt $r^{k+2} = r^k - r^{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

    (b) Lösen Sie das maximale Flussproblem mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.

35. Lösen Sie das maximale Flussproblem in Abbildung 9 mit dem Algorithmus von Goldberg und Tarjan. Starten Sie mit dem Präfluss $f(s, i) = u(s, i)$ für alle $(s, i) \in E$ und der Distanzmarkierung $d(s) = 6, d(2) = d(3) = 2, d(4) = d(5) = 1, d(t) = 0$.

36. Ein Restaurantbesitzer hat folgendes Problem: Er weiß, dass für den Tag i der nächsten Woche d_i Servietten benötigt werden ($i = 1, \ldots, 7$). Jeden Morgen können frische Servietten zum Preis von a Euro pro Serviette gekauft werdenn. Ferner kann am Ende jeden Tages ein Teil der benutzten Servietten zur Reinigung gebracht werden. Dort gibt es das Schnell- und Normalservice zum Preis von je b bzw. c Euro pro Serviette. Bei der Normalreinigung erhält man die Servietten am übernächsten Tag in der Früh, bei der Schnellreinigung bereits am nächsten Tag. Modellieren Sie das Problem als minimales Kostenflussproblem.

37. (a) Lösen Sie das in der Abbildung 10 gegebene MKFP mit Hilfe des negativen Kreisealgorithmus, wobei für jede Kante (i, j) die Kapazitäten und die Kosten $(u(i, j), c(i, j))$ und für jeden Knoten die Nachfrage bzw. das Angebot $b(v)$ gegeben sind. Verwenden Sie dabei folgenden Startfluss: $f(1, 3) = 1, f(3, 4) = 3, f(3, 5) = 2, f(2, 3) = 4, f(5, 2) = 8$.

(b) Geben Sie für den optimalen Fluss f zulässige Knotenpotentiale $\pi(v)$ an und überprüfen Sie, dass $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in E(G_f)$.

38. Lösen Sie das in der Abbildung 10 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus ohne Berücksichtigung der Knotenpotentiale.

39. Lösen Sie das in der Abbildung 11 gegebene MKFP mit Hilfe des kürzesten augmentierenden Wegealgorithmus und achten Sie darauf, dass die Kantenlängen durch geeignete Knotenpotentiale immer positiv bleiben! Auf den Kanten (i, j) sind wieder die Werte $(u(i, j), c(i, j))$ gegeben.

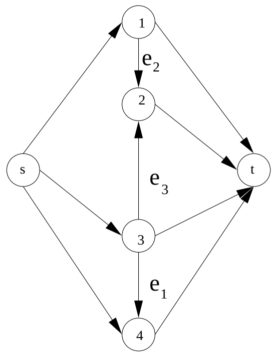

Abbildung 7: Ford-Fulkerson-Algorithmus terminiert für irrationale Kapazitäten nicht

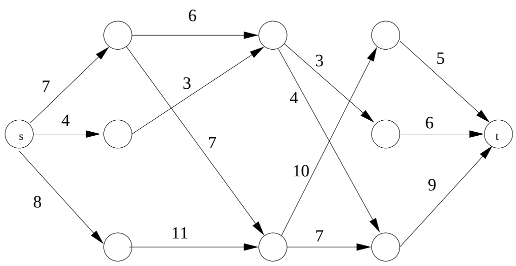

Abbildung 8: blockierender Fluss

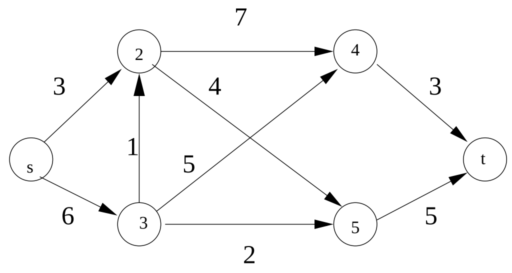

Abbildung 9: Algorithmus von Goldberg und Tarjan

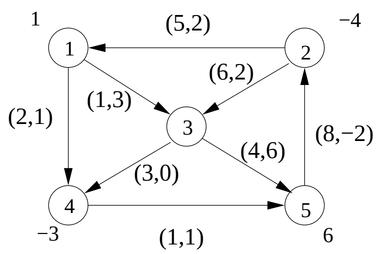

Abbildung 10: MKFP für Aufgabe 37 und 38

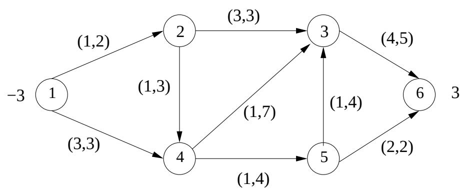

Abbildung 11: MKFP für Aufgabe 39