Kombinatorische Optimierung Übungsbeispiele WS 2009/10

1. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit reellen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$. Wie können Sie einen kreisfreien Graphen (Wald) $W = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ finden, der maximales Gewicht $c(W) := \sum_{e \in E'} c(e)$ hat? Zeigen Sie, dass diese Problem zum MST-Problem äquivalent ist.

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit reellen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Gesucht ist ein Spannbaum T von G mit $d_T(v) \leq k$ für alle $v \in V(T)$, d.h. in T soll jeder Knotengrad kleiner gleich k sein. Zeigen Sie, dass dieses Problem $\mathcal{N}P$-vollständig ist.

3. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit reellen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$ und bezeichne für einen Spannbaum $T = (V, E')$ mit $L(T)$ die sortierte Liste des Kantengewichte, d.h. $L(T) = (c(e_1), \ldots, c(e_{n-1}))$ mit $c(e_1) \leq \ldots \leq c(e_{n-1})$ und $e_i \in E'$. Zeigen Sie: Sind T_1 und T_2 minimale Spannbäume von G, so gilt $L(T_1) = L(T_2)$.

4. Zeigen Sie, dass für den vollstängig bipartiten Graphen $\tau(K_{n,m}) = m^{n-1} n^{m-1}$ gilt.

5. Gegeben sei ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit den Kantengewichten $c : E \to [0, 1]$. Die Gewichte geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Kante ausfällt. Suchen Sie einen Spannbaum, bei dem die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kanten erhalten bleiben, maximal ist. Zeigen Sie, dass dieses Problem als MST-Problem formuliert werden kann, wenn man annimmt, dass die Ausfallswahrscheinlichkeiten unabhängig sind.

6. Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Kruskal einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1.

7. Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Prim einen minimalen spannenden Baum für den Graphen aus Abbildung 1 (wählen Sie den Knoten 1 als Startknoten).

8. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph mit reellen Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$. Geben Sie einen Algorithmus an, der einen Spannbaum $T = (V, E')$ mit minimalen Gewicht für die Engpasszielfunktion findet, d.h. $c(T) := \max_{e \in E'} c(e)$. Zeigen Sie, dass jeder minimale Spannbaum (für die Summenzielfunktion) eine Optimallösung für das Engpassproblem ist.

9. Sei $T = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $s \in V$ ein ausgezeichneter Knoten. Wenn die Kantenmenge E genau einen Kreis C enthält und wenn ferner der Knoten s in C enthalten ist und Grad $d(s) = 2$ hat, dann heißt T 1-Baum.

   (a) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Lösung des folgenden Problems an: Gegeben ist ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$.
   Gesucht ist ein spannender 1-Baum $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$ mit minimalem Gesamtgewicht $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$.

   (b) Zeigen Sie, dass der optimale Zielfunktionswert dieses Problems eine untere Schranke für den optimalem Zielfunktionswert des Travelling Salesman Problems auf dem Graphen G ist.

10. Untersuchen Sie den folgenden Algorithmus für das MST-Problem:

INPUT: Ungerichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c : E \to \mathbb{R}$
OUTPUT: Ein minimaler Spannbaum T.

Sortiere die Kanten: $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \ldots \geq c(e_m)$
Setze $T := (V(G), E)$
for $i := 1$ **to** m **do**
  if $T - e_i$ ist zusammenhängend **then**
    Setze $T := T \setminus e_i$
  end if
end for

Findet dieser Algorithmus immer eine Optimallösung für das MST-Problem?

11. Beweisen Sie, dass das Spannbaumpolytop aus der Vorlesung im Allgemeinen eine echte Teilmenge des folgenden Polytops ist:

$$\left\{ x \in [0,1]^{E(G)} : \sum_{e \in E(G)} x(e) = n - 1, \sum_{e \in \delta(X)} x(e) \geq 1 \quad \text{für } \emptyset \subset X \subset V(G) \right\}$$

Hinweis: Um zu zeigen, dass dieses Polytop nicht ganzzahlige ist, betrachten Sie den folgenden Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (1, 3)\}$ und die Gewichtsfunktion $c(1, 2) = c(2, 3) = c(1, 3) = 0$ und $c(3, 4) = c(4, 5) = c(5, 1) = 1$.

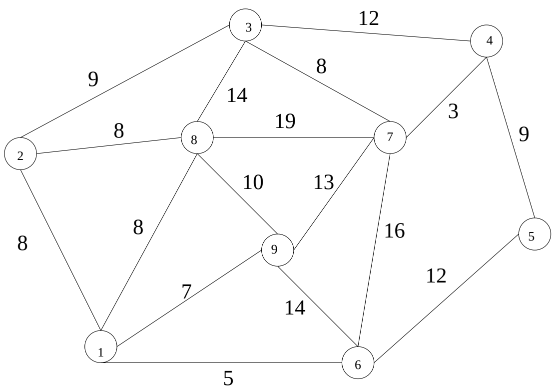

Abbildung 1: Beispiel 6, 7