Diskrete Mathematik SS 2012
9. Übungsblatt

50. Beweisen Sie für alle $n \geq 0$ die Gleichung
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n.$$

51. Bestimmen Sie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$$
wenn
    (a) $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, 5$;
    (b) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \dots, 4$ und $x_5 \geq 5$;
    (c) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \dots, 3$, $0 \leq x_4 \leq 4$ und $0 \leq x_5 \leq 4$;
    (Hinweis: Inklusion/Exklusion)

52. Wie viele möglichkeiten gibe es fünf (unterscheidbare) Frauen und sieben (unterscheidbare) Männer so in einer Reihe aufzustellen, dass keine zwei Frauen nebeneinander stehen?

53. Es sei $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Paare (A, B), sodaß A eine beliebige Teilmenge von X und B eine echte Teilmenge von A ist.

54. Auf wie viele Arten kann man drei Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 99\}$ auswählen, sodaß ihre Summe durch drei teilbar ist? Auf wieviele Arten kann man drei Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 3n\}$ auswählen, sodaß ihre Summe durch drei teilbar ist?

55. Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge der Kardinaltität n. Jede Relation auf A kann als Menge $R \subseteq A \times A$ dargestellt werden.
    (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Relationen auf A.
    (b) Bestimmen Sie die Anzahl der symmetrischen Relationen auf A.
    (c) Eine Relation heißt antisymmetrische, falls gilt: $(a, b) \in R$ und $a \neq b$, dann $(b, a) \notin R$. Bestimmen Sie die Anzahl der antisymmetrischen Relationen auf A.