Diskrete Mathematik SS 2012

7. Übungsblatt

36. Eine endliche Folge von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $m \in \mathbb{N}$, heißt *schwach aufsteigend*, wenn $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$, und *schwach absteigend*, wenn $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$.

    Beweisen Sie: In jeder endlichen Folge von n^2+1 natürlichen Zahlen gibt es eine schwach aufsteigende Teilfolge der Länge $n+1$ oder eine schwach absteigende Teilfolge der Länge $n+1$.

    Hinweis: Seien a_i, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n^2\}$, gegebene natürliche Zahlen. Führen Sie in $I = \{0, 1, \ldots, n^2\}$ die Relation R mit $i\,R\,j$ dann und nur dann, wenn $i \leq j$ und $a_i \leq a_j$, ein.

37. Die Felder eines 3×7 Schachbrettes werden beliebig mit den Farben blau und rot gefärbt. Zeigen Sie, dass es immer ein Rechteck der Größe mindestens 2×2 gibt, dessen Eckfelder einheitlich gefärbt sind. Gilt die Aussage für ein 3×6 Schachbrett?

38. Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument: $\binom{2n}{3} = 2\binom{n}{3} + 2n\binom{n}{2}$.

39. (a) Beweisen Sie die Formel
    $$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$
    für ein beliebiges, fixes $r \in \mathbb{N}$ durch Induktion über n. Erkennen Sie die Aussage dieser Formel für $r = 1$ wieder?

    (b) Finden Sie für die obige Formel einen kombinatorischen Beweis.

    (c) Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=2}^{n} i(i-1)$ und $\sum_{i=1}^{n} i^2$ unter Verwendung der Formel aus Punkt (a).

40. Beweisen Sie:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$, für $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

    (b) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$, für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

    Stellen Sie die Ergebnisse im Pascalschen Dreieck dar.

41. Wieviele Summanden enthält die Summe $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{10} a_i b_j c_k$? Wieviele Summanden sind es, wenn zur Summationsvorschrift die Nebenbedingung $i < j < k$ hinzukommmt?

42. Wie viele natürliche Zahlen n, $n \leq 10^6$ sind weder von der Form x^2 noch x^3, noch x^5, noch x^7 für ein $x \in \mathbb{N}$.

43. Ein Dominostein ist ein Rechteck bestehend aus zwei Quadraten, wobei in jedem Quadrat durch Punkte eine Zahl von 1 bis n dargestellt wird. Wie viele verschiedene Dominosteine gibt es?

44. Auf wie viele Arten kann ein König auf einem 8×8 Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei pro Zug entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben oder ein Feld (diagonal) nach rechts oben ziehen darf?

45. Betrachten wir ein $n \times n$ Schachbrett und die kürzesten Wege von der linken unteren Ecke A zur rechten oberen Ecke B, die immer entlang der Seiten der quadratischen Felder verlaufen.

    (a) Wieviele solche Wege gibt es?

    (b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Wege, die nie unter die Diagonale (der Linie AB) gehen, genau die Catalan Zahl $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ ist.

46. Wie viele k-elementige Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine zwei aufeinander folgende Zahlen enthalten?