Diskrete Mathematik SS 2012

3. Übungsblatt

15. Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\deg(v) \neq 2$ für alle $v \in V$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten $v_0 \in V$ enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.

16. Sei T ein Baum auf n Knoten, in dem kein Knoten Grad 2 hat. Zeigen Sie, dass für die Länge d eines längsten Pfades in T die Ungleichung $d \leq \frac{n}{2}$ gilt.

17. Gegeben sei ein 4×4 Schachbrett, aus dem der folgende Graph $G = (V, E)$ erzeugt wird. Die Knoten in V entsprechen den Feldern des Schachbrettes. Die Kante $\{a, b\}$ existiert genau dann wenn ein Springer in einem Zug vom Feld a zum Feld b gelangen kann.
Zeigen Sie, dass dieser Graph G (a) bipartit und (b) zusammenhängend ist. Kann der Graph durch Wegnahme eines einzigen Feldes unzusammenhängend gemacht werden? Ist dieser Graph Eulersch?

18. Eine offene Euler-Tour in einem Graphen ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten verschieden sind. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass ein Graph eine offene Euler-Tour enthält. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an den beiden Graphen in Abbildung 1.

19. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zufällig Eulersch* vom Knoten v_0 aus, wenn jede maximale Tour, die bei v_0 startet, auch eine geschlossene Eulersche Tour in G ist. Das heißt, das jeder beim Knoten v_0 startende und folgendermaßen konstruierter Weg eine Eulersche Tour ist. In der ersten Iteration is v_0 der aktuelle Knoten. In jedem iterativen Schritt wird der Weg um eine *beliebige* im Weg noch nicht vorkommende und mit dem aktiven Knoten v inzidierende Kante $u = \{v, w\}$ verlängert. Danach wird w der aktuelle Knoten. Diese Prozedur wird so oft wie möglich wiederholt.

    (a) Zeigen Sie, dass die Graphen in Abbildung 2a und 2b zufällig Eulersch vom Knoten v_0 aus sind.

    (b) Zeigen Sie, dass die Graphen in Abbildung 3a und 3b nicht zufällig Eulersch vom Knoten v_0 aus sind.

    (c) Beweisen Sie die folgende Charakterisierung zufällig Eulersche Graphen. Eine zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten alle geraden Grad haben, ist genau dann von einem Knoten v_0 aus zufällig Eulersch, wenn der Graph $(V \setminus \{v_0\}, \{e \in E \colon v_0 \notin e\})$ keinen Kreis enthält.

20. Für einen Graphen $G = (V, E)$ wird der so genannte *Kantengraph von G* mit $L(G)$ (auf Englisch *line graph*) bezeichnet: $L(G) = (E, \{\{e, e'\} \colon e \cap e' \neq \emptyset\})$. Sind die folgenden Aussagen für jeden Graphen G wahr?

    (a) G ist genau dann zusammenhängend, wenn $L(G)$ zusammenhängend ist.

    (b) G ist genau dann Eulersch, wenn $L(G)$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

21. Der vollständige bipartite Graph $K_{a,b}$ besteht aus der Knotenmenge $A \cup B$ mit $|A| = a \geq 1$ und $|B| = b \geq 1$, sodass $A \cap B = \emptyset$ und aus allen Kanten $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

    (a) Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Eulerschen Kreis besitzt.

(b) Charakterisieren Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, für die $K_{a,b}$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

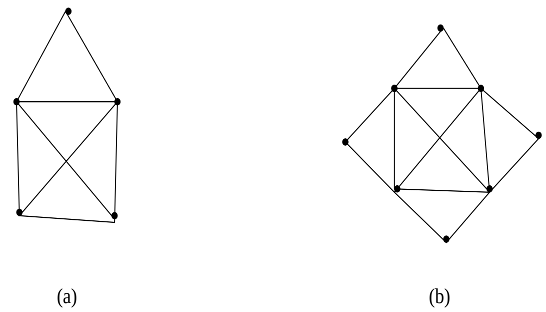

Abbildung 1: Graphen für Aufgabe 18

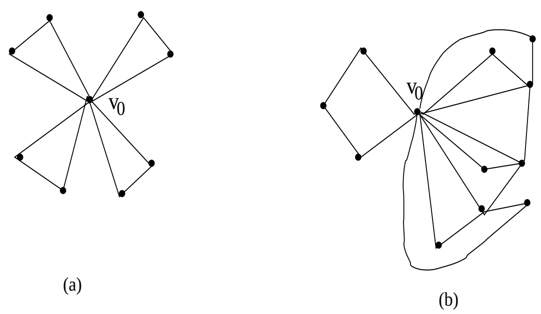

Abbildung 2: Graphen für Aufgabe 19a

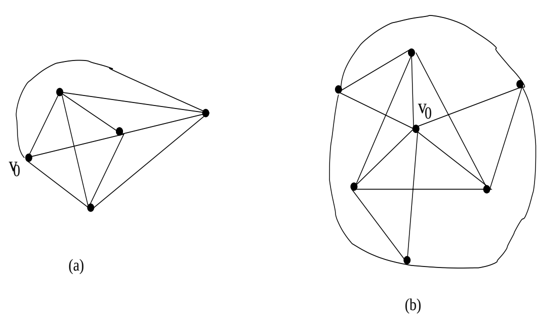

Abbildung 3: Graphen für Aufgabe 19b