Diskrete Mathematik SS 2012

2. Übungsblatt

12. Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$ so dass der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

13. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann ist der Wiener Index von G definiert als

$$W(G) := \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v).$$

   (a) Sei $P_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, n-1\}$ der Pfad mit n Knoten. Zeigen Sie, dass

$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}$$

   (b) Zeigen Sie: Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit einer ungeraden Anzahl an Knoten, dann ist $W(T)$ gerade.

14. Das Sperner'sche Lemma (Sperner 1928)

   (a) Das Sperner'sche Lemma in einer Dimension: Die Knoten des Weges $P_n = (V, E)$, wobei $V = \{0, 1, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, i-1\} \mid i = 1, \ldots, n\}$, sind mit zwei Farben gefärbt, wobei die Knoten 0 und n unterschiedliche Farben haben.
   Zeigen Sie: Die Anzahl der Kanten, deren Endknoten zwei verschiedene Farben haben ist ungerade.

   (b) Sei ein Dreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird nun auf beliebige Weise in endlich viele kleiner Dreiecke unterteilt, wobei keine Ecke eines Dreiecks auf einer Kante eines der anderen kleineren Dreiecke liegen darf. Eine solche Zerlegung heißt Triangulierung.
   Seien die Ecken des großen und der kleineren Dreiecke mit den Zahlen 1,2,3 markiert wobei folgende Regel erfüllt ist: Die Ecke A_i erhält die Markierung i, $i = 1, 2, 3$; und alle Ecken, die auf der (großen) Dreiecksseite zwischen A_i und A_j liegen, erhalten als Markierung entweder i oder j. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 gegeben.

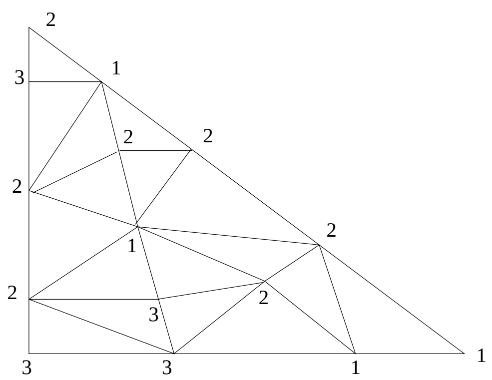

Abbildung 1: Beispiel einer Triangulierung

Zeigen Sie: Die Anzahl der dreieckigen Flächen, deren Ecken alle drei mit verschiedenen Zahlen markiert sind ist ungerade.
Hinweis: Konstruieren Sie einen Graphen wie folgt: Zeichnen Sie ins Innere jedes Dreiecks einen Knoten und einen zusätzlichen Knoten außerhalb des großen Dreiecks. Verbinden Sie zwei Knoten, wenn die entsprechenden Flächen in der ursprünglichen Zeichnung benachbart sind und die beiden gemeinsamen Knoten mit 1 und 2 markiert sind.
Wie kann man an diesem Graphen erkennen, ob ein Dreieck die im Sperner'schen Lemma gewünschte Eigenschaft hat? Welchen Grad hat der "äußere Knoten"?