Diskrete Mathematik SS 2012

10. Übungsblatt

56. Wie viele perfekte Matchings hat ein $2 \times n$ Gitter?

57. Bestimmen Sie die Anzahl der Folgen der Länge n mit Einträgen aus $\{-1, 0, 1\}$, sodass keine zwei aufeinanderfolgende Einträge von 0 verschieden sind.

58. Zeigen Sie: Für alle $n \geq 1$ ist $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ eine natürliche Zahl.

59. Berechnen Sie den Koeffizienten von
    (a) x^{2000} in $(x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^5$,
    (b) xy^3zt^2u in $(x + y + z + t + u)^8$.

60. Die Lukaszahlen sind definiert durch $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Zeigen Sie, dass $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ für $n \geq 1$ und geben Sie eine explizite Darstellung für L_n an, wobei F_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, die Fibonacci-Folge ist.

61. Bestimmen Sie eine Rekursion für die Anzahl der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine drei aufeinander folgende Zahlen enthalten.

62. Finden Sie die erzeugenden Funktionen für die nachstehenden Folgen. Bitte geben Sie sie in geschlossener Form an, nicht als unendliche Reihe!
    (a) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$, d.h. $a_k = (1+k)^3$, $k \in N_0$, (b) $1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, \ldots$.

63. Sei a_n die Anzahl von geordneten Tripeln (i, j, k) ganzer Zahlen, so dass $i \geq 0$, $j \geq 1$ und $k \geq 1$ und $i + 3j + 2k = n$. Finden Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und bestimmen Sie eine Formel für a_n.

64. Bestimmen Sie die Anzahl y_n der Wörter der Länge n über dem alphabet $\{a, b, c\}$, die eine gerade Anzahl a's und eine ungerade Anzahl b's enthalten.