Diskrete Mathematik, SS 2010, 5. Übungsblatt

43. Zeigen Sie, dass jedes endliche Poset $(X, \preceq)$ auf eine totale Ordnung $(X, \preceq_t)$ vervollständigt werden kann, d.h. es gibt eine Ordnungsrelation $\preceq_t$, mit

$$x \preceq y \Rightarrow x \preceq_t y \qquad \forall x, y \in X$$

und $(X, \preceq_t)$ ist eine totale Ordnung!

44. Auf der Menge $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation $R \subseteq M \times M$ definiert durch

$$aRb \iff (a - b) \leq 0 \text{ und } a - b \text{ ist gerade .}$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf M ist!

   (b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für diese Halbordnung!

   (c) Sei $Y = \{-3, -2, 0, 1, 2, 4\}$. Bestimmen Sie (falls vorhanden) das größte Element, alle minimalen Elemente und das Infimum der Menge Y.

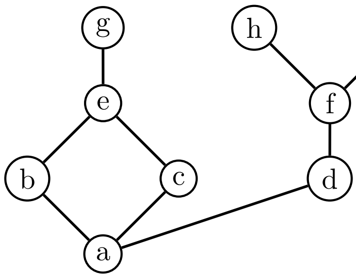
45. Sei $(X, \preceq)$ ein Poset.

   (a) Beweisen Sie: Wenn es in $(X, \preceq)$ zu jedem Paar $a, b \in X$ das Supremum $\sup(\{a, b\}) = \sup(a, b)$ gibt, dann gilt für alle $a, b, c \in X$:

$$\sup(a, \sup(b, c)) = \sup(\sup(a, b), c)$$

   (b) Beweisen Sie, dass die Anzahl der minimalen Elemente von $(X, \preceq)$ eine untere Schranke der Dilworth-Zahl $d(X)$ ist.

46. Gegeben sei ein Poset $(X, \leq)$, dargestellt durch folgendes Hasse-Diagramm:



   (a) Bestimmen Sie algorithmisch eine minimale Kettenzerlegung von $(X, \leq)$.

   (b) Bestimmen Sie algorithmisch eine maximale Antikette von $(X, \leq)$.

   (c) Vervollständigen Sie $(X, \leq)$ zu einer totalen Ordnung.

   (d) Bestimmen Sie das kleinste/größte Element, das Supremum und Infinum (falls vorhanden), sowie alle Maxima, Minima der Teilmenge $\{e, f\}$.

47. Zwei Posets $(X, \leq)$ und $(Y, \preceq)$ heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, sodass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $x_1 \leq x_2$ gilt genau dann wenn $f(x_1) \preceq f(x_2)$ gilt.

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm aller nicht isomorphen Posets auf drei Elementen.

   (b) Zeigen Sie, dass je zwei totale Ordnungen auf n Elementen isomorph sind (d. h., eine totale Ordnung auf n Elementen ist bis auf Isomorphie eindeutig).

48. Folgern Sie aus dem Satz von Dilworth: Jede geordnete Menge mit n^2+1 Elementen enthält eine Kette oder eine Antikette mit mindestens $n+1$ Elementen.

49. (a) Leiten Sie aus Aufgabe 48 den Satz von Erdös-Szekeres her: "In einer Folge von n^2+1 paarweise verschiedenen Zahlen gibt es immer eine steigende oder fallende Teilfolge der Länge $n+1$."

    (b) Finden sie eine Folge von n^2 paarweise verschiedenen Zahlen, die weder eine steigende noch eine fallende Teilfolge der Länge $n+1$ besitzt.

    Hinweis: Es sei $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$ die betrachtete Zahlenfolge. Untersuchen Sie die Ordnung auf den Paaren (a_i, i), die durch $(a_i, i) \leq (a_j, j)$ gdw. $a_i \leq a_j$ und $i \leq j$ festgelegt ist.

50. Beweisen Sie für alle positiven ganzen Zahlen n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2(-1)^n\right)$$

    Hinweis: Setzen Sie in den binomischen Lehrsatz jeweils $y=1$ und x der Reihe nach $1, \zeta_1, \zeta_2$ wobei ζ_1, ζ_2 die beiden dritten Einheitswurzeln sind, d.h. $\zeta_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

51. Bestimmen Sie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$$

    wenn

    (a) $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, 5$;

    (b) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \ldots, 4$ und $x_5 \geq 5$;

    (c) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \ldots, 3$, $0 \leq x_4 \leq 4$ und $0 \leq x_5 \leq 4$;
    (Hinweis: Inklusion/Exklusion)