Diskrete Mathematik, SS 2010, 1. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die Anzahl nicht-isomorpher Graphen mit $n = 2, 3, 4$ Knoten.

2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Beweisen Sie, dass dann für zwei Teilmengen U und V der Knoten $|N(U)| + |N(V)| \geq |N(U \cap V)| + |N(U \cup V)|$ gilt.

3. Finden Sie einen Isomorphismus zwischen den beiden ungerichteten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$. Die Knotenmengen sind $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ und $V_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Die Kantenmengen E_1 und E_2 sind durch die folgenden *Adjazenzlisten* bestimmt (der oberste Knoten in jeder Spalte hat genau die anderen Knoten in dieser Spalte als Nachbarn).

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

4. Entscheiden Sie algorithmisch, ob es einen Graphen mit der Gradfolge $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$ gibt und finden Sie gegebenenfalls einen solchen Graphen.

5. (a) Zeigen Sie: Wenn zwei Graphen isomorph sind, so sind auch ihre Komplemente isomorph. (Das Komplement von G enthält die Kante e genau dann, wenn e nicht in G enthalten ist.)
   (b) Finden Sie einen Graphen, der zu seinem Komplement isomorph ist.
   (c) Kann ein Graph mit 7 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?
   (d) Wieviele Kanten hat ein Graph mit n Knoten, der zu seinem Komplement isomorph ist?

6. Gibt es für alle $n \geq 2$ einen Graphen mit n Knoten, dessen Gradfolge $n - 1$ verschiedene Zahlen enthält?

7. 20 Fußballmannschaften spielen 14 Matches, wobei jede Mannschaft an mindestens einem Spiel beteiligt ist und keine Mannschaften öfters als einmal gegeneinander antreten. Beweisen Sie: Es gibt 6 Spiele, an denen genau 12 Mannschaften teilnehmen.

8. Für einen ungerichteten einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist der zugehörige Komplementgraph $G^c = (V, E^c)$ durch folgende Bedingung definiert: $\{u, v\} \in E^c$ genau dann wenn $\{u, v\} \notin E$.
   Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $G \cong G^c$, dann gilt $|V| \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$.

9. Sei $D = (d_1, \dots, d_{2k})$ definiert durch $d_{2i} = d_{2i-1} = i$ für $1 \leq i \leq k$. Dann ist D eine Gradfolge für alle $k \geq 1$.

10. Das Sperner'sche Lemma (Sperner 1928)

    (a) Das Sperner'sche Lemma in einer Dimension: Die Knoten des Weges $P_n = (V, E)$, wobei $V = \{0, 1, \dots, n\}$, $E = \{\{i, i-1\} \mid i = 1, \dots, n\}$, sind mit zwei Farben gefärbt, wobei die Knoten 0 und n unterschiedliche Farben haben.
    Zeigen Sie: Die Anzahl der Kanten, deren Endknoten zwei verschiedene Farben haben ist ungerade.

    (b) Sei ein Dreieck mit den Ecken A_1, A_2, A_3 in der Ebene gegeben. Dieses Dreieck wird nun auf beliebige Weise in endlich viele kleiner Dreiecke unterteilt, wobei keine Ecke eines Dreiecks auf einer Kante eines der anderen kleineren Dreiecke liegen darf. Eine solche Zerlegung heißt Triangulierung.

Seien die Ecken des großen und der kleineren Dreiecke mit den Zahlen 1,2,3 markiert wobei folgende Regel erfüllt ist: Die Ecke A_i erhält die Markierung i, $i = 1, 2, 3$; und alle Ecken, die auf der (großen) Dreiecksseite zwischen A_i und A_j liegen, erhalten als Markierung entweder i oder j. Ein Beispiel ist in Abbildung 1 gegeben.

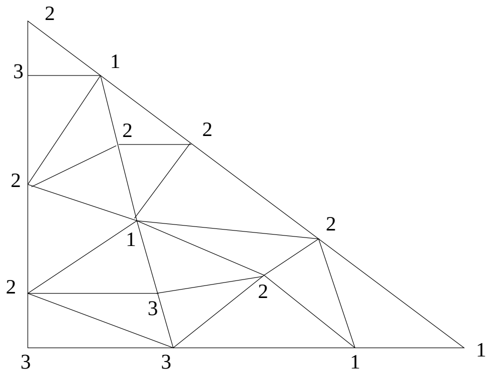

Abbildung 1: Beispiel einer Triangulierung

Zeigen Sie: Die Anzahl der dreieckigen Flächen, deren Ecken alle drei mit verschiedenen Zahlen markiert sind ist ungerade.
Hinweis: Konstruieren Sie einen Graphen wie folgt: Zeichnen Sie ins Innere jedes Dreiecks einen Knoten und einen zusätzlichen Knoten außerhalb des großen Dreiecks. Verbinden Sie zwei Knoten, wenn die entsprechenden Flächen in der ursprünglichen Zeichnung benachbart sind und die beiden gemeinsamen Knoten mit 1 und 2 markiert sind.
Wie kann man an diesem Graphen erkennen, ob ein Dreieck die im Sperner'schen Lemma gewünschte Eigenschaft hat? Welchen Grad hat der "äußere Knoten"?

11. Beweisen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ mit k Zusammenhangskomponenten mindestens $n - k$ Kanten enthält.

12. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ für alle $v \in V$. Dann ist G zusammenhängend.

13. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A. Beweisen Sie die folgende Formel für die Anzahl der Kreise der Länge 4 in G

$$\frac{1}{8}\left(\operatorname{tr}(A^4) - 2|E| - 4\sum_{v \in V}\binom{d(v)}{2}\right),$$

wobei $\operatorname{tr}(M)$ die Spur der Matrix M bezeichnet und $d(v)$ den Grad eines Knoten $v \in V$.

14. Zeigen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dann ist entweder G oder G^c zusammenhängend.