Diskrete Mathematik 7. Übungsblatt

68. Finden Sie den Koeffizienten von z^k in $(z^4 + z^5 + z^6 + \ldots)^5$ für $k \geq 20$.

69. Finden Sie den Koeffizienten von z^k in $(z + z^3 + z^5)(1 + z)^n$ für $k \geq 5$.

70. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ zur Folge

    (a) $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2}$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;

    (b) $a_k = k^2$.

71. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k folgender erzeugenden Funktionen $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

    (a) $A(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$

    (b) $A(x) = \frac{x-14}{x^2-x-2}$

72. Sei a_k die Anzahl von Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, k\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten. Stellen Sie eine Rekursion für a_k auf.

73. Gegeben sei die Rekursion $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 2^n$ für alle $n \geq 0$ mit $a_0 = 0$. Geben Sie eine geschlossene Form für die Folge a_n an!

74. Beweisen Sie

    (a) $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$ (Hinweis: kombinatoritsche Überlegung)

    (b) $S(n, 3) > 3^{n-2}$ für $n \geq 6$ (Hinweis: Induktion nach n)

75. Welche der folgenden Relationen sind Ordnungsrelationen?

    (a) die Relation "ist echte Teilmenge von" auf einem Mengensystem;

    (b) die Relation "hat größere x-Koordinate als" auf den Punkten der Ebene;

    (c) die Relation "$\alpha R \beta$ gdw. $\sin(\alpha - \beta) \geq 0$" auf den Winkeln im Intervall $[0, 2\pi]$;

    (d) die Relation "$(a_1 + b_1 i) R (a_2 + b_2 i)$ gdw. $a_1 < a_2$ oder $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$" auf den komplexen Zahlen.

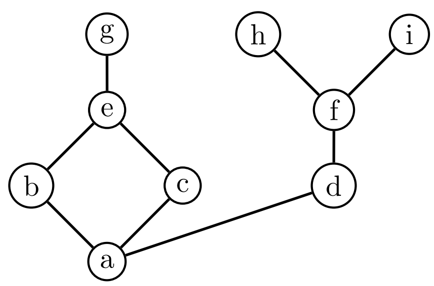
76. Gegeben sei die Grundmenge $A = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} \times \{5\}$ und eine Ordnungsrelation $\preceq$, die wie folget definert ist: $(a, b) \preceq (c, d)$ genau dann wenn $a \leq c$ und $b \leq d$ gilt.

    (a) Ist $(A, \preceq)$ ein Poset oder eine total geordnete Menge?

    (b) Zeichen Sie das dazugehörige Hasse-Diagramm!

    (c) Bestimmen Sie das kleinste sowie größte Element (falls vorhanden), alle minimalen und maximalen Elemente sowei eine untere und obere Schranke für folgende Teilmengen: $Y_1 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, $Y_2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2)\}$.

77. Gegeben sei ein Poset $(X, \leq)$, dargestellt durch folgendes Hasse-Diagramm:



(a) Bestimmen Sie eine minimale Kettenzerlegung von $(X, \leq)$.

(b) Bestimmen Sie eine maximale Antikette von $(X, \leq)$.

(c) Vervollständigen Sie $(X, \leq)$ zu einer totalen Ordnung.

(d) Bestimmen Sie das kleinste/größte Element, das Supremum und Infinum (falls vorhanden), sowie alle Maxima, Minima der Teilmenge $\{e, f\}$.

78. Bestimmen Sie ein stabiles Matching im vollständigen bipartiten Graphen $G = (S \cup T, E)$ mit $S = \{s_1, \ldots, s_5\}$ und $T = \{t_1, \ldots, t_5\}$ und folgenden Präferenzlisten:

$$\begin{array}{ll} s_1 : t_4 < t_2 < t_1 < t_3 < t_5 & t_1 : s_2 < s_3 < s_5 < s_1 < s_4 \\ s_2 : t_3 < t_4 < t_2 < t_5 < t_1 & t_2 : s_3 < s_5 < s_1 < s_2 < s_4 \\ s_3 : t_4 < t_5 < t_1 < t_2 < t_3 & t_3 : s_3 < s_4 < s_2 < s_1 < s_5 \\ s_4 : t_2 < t_5 < t_1 < t_4 < t_3 & t_4 : s_1 < s_4 < s_5 < s_2 < s_3 \\ s_5 : t_1 < t_4 < t_5 < t_3 < t_2 & t_5 : s_3 < s_5 < s_2 < s_4 < s_1 \end{array}$$

79. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A. Beweisen Sie die folgende Formel für die Anzahl der Kreise der Länge 4 in G

$$\frac{1}{8}\left(\operatorname{tr}(A^4) - 2|E| - 4\sum_{v \in V}\binom{d(v)}{2}\right),$$

wobei $\operatorname{tr}(M)$ die Spur der Matrix M bezeichnet und $d(v)$ den Grad eines Knoten $v \in V$.

80. Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (U \cup V, E)$ mit $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\{u_i, v_j\} \in E \iff a_{i,j} = 1$. Geben Sie ein Matching mit maximaler Kardinalität an. Verwenden Sie dieses Matching um eine minimale Kontenüberdeckung zu finden!