Diskrete Mathematik 6. Übungsblatt

49. Zeigen Sie, dass der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ $m^{n-1}n^{m-1}$ Spannbäumne hat.

50. Aus einer Gruppe von p Frauen und q Männern soll ein Team von k Personen zusammengestellt werden ($k \leq p + q$).

    (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team gleich viele Männer wie Frauen sein müssen?

    (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team mindestens zwei Frauen sein müssen?

    (c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn im Team mehr Männer als Frauen sein müssen?

51. Ein Palindrom ist ein Wort, das von vorne und von hinten gelesen den selben Ausdruck ergibt, z. B. *RENNER*. Wie viele n-stellige Palindrome gibt es über einem Alphabet, das m Buchstaben umfasst?

52. Auf einem $m \times n$-Gitter ist die Anzahl der kürzesten Wege von der linken oberen Ecke zur rechten unteren Ecke gesucht, wobei man nur entlang der Kanten im Gitter wandern darf.

53. Auf einem Schreibtisch liegen n Stapel von Akten. Jeder Stapel umfasst genau k Akten. Der Bearbeiter nimmt sich stets eine Akte, die auf einem Stapel obenauf liegt zu nächsten Bearbeitung. Wie viele verschiedene Reihenfolgen der Bearbeitung der Akten gibt es?

54. Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es, wenn man mit n (nicht voneinander unterscheidbaren) Würfeln gleichzeitig würfelt?

55. Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge der Kardinaltität n. Jede Relation auf A kann als Menge $R \subseteq A \times A$ dargestellt werden.

    (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Relationen auf A.

    (b) Bestimmen Sie die Anzahl der symmetrischen Relationen auf A.

    (c) Eine Relation heißt antisymmetrische, falls gilt: $(a, b) \in R$ und $a \neq b$, dann $(b, a) \notin R$. Bestimmen Sie die Anzahl der antisymmetrischen Relationen auf A.

56. Bei der Pokervariante Texas Hold'em bekommt man zuerst fünf Karten auf die Hand. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Paare zu haben?

57. Wie viele dreistellige Zahlen sind nicht durch 4, 5 und 6 teilbar?

58. Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes *Tennessee* angeordnet werden ohne dass zwei E's nebeneinander stehen?

59. Wenn man zwölf unterscheidbare Würfeln wirft, wie viele Ergebnisse gibt es, bei der jede Zahl von eins bis sechs mindestens einmal aufscheint?

60. Zeigen Sie, dass bei $n + 1$ positiven ganzen Zahlen nicht größer als $2n$ immer zwei davon relativ prim zueinander sind.

61. Existieren vier bzw. fünf verschiedene positive ganze Zahlen derart, dass die Summe von je dreien eine Primzahl ist?

62. Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a)
$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{n}{m} = (-1)^k\binom{n-1}{k} \qquad \text{für } k < n$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m} \qquad \text{für } m \leq n$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

63. Beweisen Sie für alle positiven ganzen Zahlen n:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2(-1)^n\right)$$
Hinweis: Setzen Sie in den binomischen Lehrsatz jeweils $y = 1$ und x der Reihe nach 1, ζ_1, ζ_2 wobei ζ_1, ζ_2 die beiden dritten Einheitswurzeln sind, d.h. $\zeta_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

64. Beweisen Sie durch kombinatorische Überlegungen:

(a)
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \qquad \text{für } 0 \leq k \leq r \leq n \in \mathbb{N}$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{i} = \binom{2n+1}{n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

65. Zu einem Empfang sind n Herren geladen. Sie alle tragen Zylinder und geben diesen bei der Garderobe ab. Bei der Rückgabe ist die Garderobenfrau nicht ganz bei der Sache und gibt die Zylinder nach dem Zufallsprinzip zurück. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt keiner der Herren den richtigen Zylinder zurück?

66. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion für folgende Folgen:

(a) $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots)$

(b) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, \ldots)$

(c) $a_n = \frac{5}{2}3^n - n - \frac{3}{2}$ für $n \geq 2$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 5$

67. Eine Kiste enthält 25 rote, 50 blaue und 60 weiße Kugeln. Auf wie viele Arten kann man aus der Kiste 80 Kugeln entnehmen?
Hinweis: Stellen Sie die erzeugende Funktion auf und verwenden Sie dann folgende Tatsachen:

- Die Funktion $(1+x)^r$ ist die erzeugende Funktion der Folge $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots)$ (sh. Analysisvorlesung)
- $\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{-r+k-1}{-r-1}$ (Beweis!)

Die Aufgabe soll ohne Computer gelöst werden!