Diskrete Mathematik 1. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Operationen $\oplus$ auf den reellen Zahlen assoziativ bzw. kommutativ sind:

   (a) $x \oplus y = x + y + 3$

   (b) $x \oplus y = x + y + xy + 6$

   (c) $x \oplus y = 77$

   (d) $x \oplus y = \max\{x, 8\}$

2. Zeigen Sie: Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist genau dann eine kommutative Gruppe, wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$.

3. Vervollständigen Sie die folgende Verknüpfungstafel auf alle möglichen Arten, sodass eine Halbgruppe entsteht.

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	3	4
3	3	4	3	4
4	.	.	.	.

4. Vervollständigen Sie die folgende Verknüpfungstafel auf alle möglichen Arten, sodass ein Monoid entsteht.

	1	2	3
1	3	2	1
2	.	.	2
3	1	.	.

5. Zeigen Sie: Die Verknüpfungstafel einer endlichen Halbgruppe G ist genau dann eine Gruppentafel, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte der Tafel jedes Element von G höchstens einmal vorkommt.

6. Es sei $(G, \circ)$ ein Monoid. Betrachten Sie für ein Element $a \notin G$ die algebraische Struktur $(G \cup \{a\}, \oplus)$, wobei $g_1 \oplus g_2 = g_1 \circ g_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt und $a \oplus a = a \oplus g = g \oplus a = a$ für alle $g \in G$ gilt. Zeigen Sie: $(G \cup \{a\}, \oplus)$ ist ein Monoid.

7. Es sei U eine Menge. Die symmetrische Differenz $A \oplus B$ zweier Mengen $A, B \subseteq U$ ist $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Ist $(\mathcal{P}(U), \oplus)$ eine Gruppe?

8. Seien U_1 und U_2 Untergruppen von G. Man zeige

   (a) $U_1 \cup U_2$ ist genau dann Untergruppe von G, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

   (b) Wenn $U_1 \neq G$ und $U_2 \neq G$, dann gilt $U_1 \cup U_2 \neq G$

9. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und A, B zwei nicht-leere Teilmengen von G. Das Komplexprodukt von A und B ist definiert als
$$A \bullet B := \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\}.$$

   (a) Ist das Komplexprodukt assoziativ?

   (b) Besitzt das Komplexprodukt ein neutrales Element?

   (c) Besitzt das Komplexprodukt ein inverses Element?

10. Betrachten Sie die Menge $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$ mit der Verknüpfung $(v, w) \circ (x, y) = (vx, vy + w)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe bildet.

   (b) Bestimmen Sie alle Elemente der Ordnung 2.

   (c) Zeigen Sie, dass kein Element in $(G, \circ)$ Ordnung 28 hat.

   (d) Zeigen Sie, dass nur das neutrale Element in $(G, \circ)$ eine ungerade Ordnung hat.