2. Klausur
Diskrete Mathematik (UE) am 24. Juni 2009

Aufgabe:	1 2 3 4 5	
Punkte:	5 3 5 6 6	= *Punkte*

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Ein zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph $G = (V, E)$ besitzt $\frac{4+(k-2)|V|}{2}$ Flächen.

   (b) Gegeben sei ein Quadrat mit Seitenlänge 2. Zeichnet man in dieses Quadrat fünf Punkte, dann haben mindestens zwei davon einen Abstand, der nicht größer als $\sqrt{2}$ ist.

   (c) Ein vollständiger 3-partiter Graph $K_{r,s,t}$ ist ein 3-partiter Graph mit $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$ und jeder Knoten in V_i ist mit jedem Knoten in V_j für $i \neq j$ verbunden. Für jedes $n \geq 1$ ist der vollständige 3-partite Graph $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonsch, aber $K_{n,2n,3n+1}$ ist nicht Hamiltonsch.

2. Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten die Identität:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

3. Bestimmen Sie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$$

   wenn

   (a) $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, 5$;

   (b) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \ldots, 4$ und $x_5 \geq 5$;

   (c) $x_i \geq 0$ für all $i = 1, \ldots, 3$, $0 \leq x_4 \leq 4$ und $0 \leq x_5 \leq 4$;
   (Hinweis: Inklusion/Exklusion)

4. Gegeben sei die Rekursion $a_{n+1} = 2a_n + n$ und $a_0 = 1$.

   (a) Stellen Sie die erzeugende Funktion $A(x)$ für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf und zeigen Sie

$$A(x) = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-2x)(1-x)^2}.$$

   (b) Stellen Sie eine explizite Formel für a_n auf und verwenden Sie dafür

$$A(x) = \frac{\alpha}{(1-x)^2} + \frac{\beta}{1-x} + \frac{\gamma}{1-2x}$$

   wobei $\alpha = -1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 2$.

5. Auf der Menge $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ist die Relation $R \subseteq M \times M$ definiert durch

$$aRb \iff (a - b) \leq 0 \text{ und } a - b \text{ ist gerade .}$$

   (a) Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation auf M ist!

   (b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für diese Halbordnung!

   (c) Sei $Y = \{-3, -2, 0, 1, 2, 4\}$. Bestimmen Sie (falls vorhanden) das größte Element, alle minimalen Elemente und das Infimum der Menge Y.