Analysis 1, WS 2007/2008, 9. Übungsblatt

53. Zeigen Sie, dass die Relation R mit

$$(A,B)\in R \iff \text{ es gibt eine Bijektion } f:A\to B$$

eine Äquivalenzrelation ist. Folgern Sie daraus, dass die Menge der ungeraden, positiven Zahlen und die Menge der ganzen Zahlen gleichmächtig sind.

54. Man beweise, dass durch $d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$d(a,b)=\begin{cases} d_+(a,b) & \text{falls } ab\geq 0\\ d_+(a,0)+d_+(0,b) & \text{falls } ab<0,\end{cases}$$

wobei

$$d_+(a,b):=\sqrt{2}\frac{|a-b|}{(1+|a|)(1+|b|)},$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ erklärt wird.

55. Man untersuche die durch

$$x_1=0,\qquad x_{n+1}=\frac{1}{4}{x_n}^2+1$$

rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

56. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^3+5x^2-10x}{x^3+x^2-5x+3}$$

57. Bestimmen Sie die Ansätze (Die Koeffizienten im Zähler müssen nicht bestimmt werden!) für die Partialbruchzerlegung von

(a) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x-2)(x+4)(x^2-3x+2)}$

(b) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x+1)^2}$