Analysis 1, WS 2007/2008, 4. Übungsblatt

20. Bestimmen Sie soweit möglich den Grenzwert der folgendermaßen gegebenen Folgen (a_n), $n \in \mathbb{N}$:

    (a) $\frac{n}{3^n}$ (b) $\frac{n^2}{4^n}$ (c) $\cos(n\pi)$

    (d) $(-i)^n$ (e) $(\frac{1-i}{1+\sqrt{2}i})^n$ (f) $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}$

    (g) $\frac{1}{\sqrt{n+5}}\binom{n}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}} sin \frac{n\pi}{2}$

21. Zeigen Sie:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3(3^n+5)} = 3$

22. (a) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

    (b) Zeigen Sie: Aus $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = e$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

    (c) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ und bestimmen sie ggf. ihren Grenzwert.

23. Man untersuche folgenden Folgen auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls die Grenzwerte:

    (a) $x_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$

    (b) $x_n = \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+5}$

    (c) $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

24. Ist die Folge $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergent?

25. Man untersuche ob die Folge (a_n) mit $a_0 = a$ und $a_1 = b$, $a_n = \frac{(a_{n-1}+a_{n-2})}{2}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, konvergiert und bestimme ggf. den Grenzwert.

26. Zeigen Sie:

    (a) Es sei $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt
    $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a;$$

    (b) Es sei $a_n > 0$ $n \in \mathbb{N}$ und $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gilt:
    $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n};$$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$