Analysis 1, WS 2007/2008, 12. Übungsblatt

77. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

    (a) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, für $x > 0$,

    (b) $\ln\ln x < \frac{x}{e} - 1$, für $1 < x < e$,

    (c) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \ln(x + \sqrt{1+x^2}) < x$, für $x > 0$.

78. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x + \frac{x}{1+x^2}$ im Intervall $[-1, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt!

79. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \sqrt{|x| e^{\frac{1}{x}}}$ den Definitionsbereich, bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion differenzierbar ist und geben Sie gegebenfalls die erste Ableitung an! Untersuchen Sie weiters das Monotonierverhalten und bestimmen Sie die maximalen Konvexitäts- bzw. Konkavitätsintervalle.

80. Bestimmen Sie folegnde Grenzwerte:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos(3x) - 2\cos(2x) + \cos x}$,

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sinh^2(x))^{\frac{2}{x^2}}$,

    (c) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$,

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

    (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\sqrt{x}}$.

81. Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung:

    (a) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad (x > 0)$

    (b) $2\arctan x = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

    (c) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$

    (d) $2\,\mathrm{arccot} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \pi - x \quad (0 \leq x < \pi)$

82. Drücken Sie $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ in $t = \tan\frac{x}{2}$ aus.

83. Zeigen Sie: Wenn f (streng) konvex und g konvex und (streng) monoton wachsend ist, dann ist $g \circ f$ (streng) konvex.

84. Zeigen Sie: Jede auf einem offenen Intervall I definierte konvexe Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig!