Analysis 1, WS 2007/2008, 11. Übungsblatt

67. Man berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrucke

    (a) $x^{(x^x)}$ (b) $(x^x)^x$ (c) $\operatorname{arcosh}\sqrt{x}$ (d) $\dfrac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}+1}$

68. Beweisen Sie, dass

    (a) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$.

    (b) $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

    (c) $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

    (d) $\operatorname{artanh}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$ für $x \in (-1, 1)$
    Hinweis: Nutzen Sie die Identität $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in (-1, 1)$.

69. Differenzieren Sie folgende Funktion $f(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von f und f' an:

    (a) $f(x) = \sqrt[5]{(5x-2)^4}$ (b) $f(x) = (x-1)|x-1|$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2|x+1|}{|x-2|}$

70. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen differenzierbar:

    (a) $f(x) = |1 - e^x|$ (b) $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$
    (c) $f(x) = 2 + |\cosh x - 2|$ (d) $f(x) = |x+1|\sqrt[4]{|x-1|}$

71. Man beweise, dass $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ für $x \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

72. Man bestimme die Umkehrfunktion zu

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{falls } x \le 2 \\ -x + 4 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

    und begründe seine Existenz.

73. Man untersuche die folgende Funktion auf Monotonie:

    $$f(x) = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x}, \; 0 < a < b.$$

74. Man zeige die folgenden Ungleichungen:

    (a) $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, wenn $x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha > 1$
    Hinweis: Man betrachte die Funktion $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$.

    (b) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, wenn $x > 0$

    (c) $1 + x \le e^x \le \dfrac{1}{1-x}$, für $x < 1$

75. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Für $a = 1$ und $b = 2$ bestimme man ein $\xi \in (a, b)$, für welches $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ gilt.

76. Es sei f in $[a, b]$ differenzierbar und es gelte: $f(a) = 0$, $f(b) > 0$, $f'(b) < 0$. Man zeige, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt mit $f'(c) = 0$.