Analysis I Übungsklausur - Musterlösung
25. Jänner 2008

Beispiel 1
Bestimmen Sie für die untenstehende Funktion $f(x)$ den maximalen Definitionsbereich D, den Stetigkeitsbereich S und den Differenzierbarkeitsbereich $D_{f'}$. Geben Sie die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in D_{f'}$ an. Untersuchen Sie die Existenz der einseitigen Ableitungen $f'(x^+)$ und $f'(x^-)$ für $x \in D \setminus D_{f'}$. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion am Rande des Definitionsbereiches D.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & |x| \geq 2 \\ -\frac{4}{|x|} & |x| < 2 \end{cases}$$

Lösung

- Definitonsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ wegen der Division durch } |x|$$

- Stetigkeit:

  Als Polynom ist $2 - x^2$ überall in $\mathbb{R}$ stetig, daher is $f(x)$ stetig für $|x| > 2$.

  $|x|$ ist auch überall stetig, die konstante Funktion auch, somit ist der Quotient $-4/|x|$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also ist $f(x)$ auch in $(-2, 0) \cup (0, 2)$ stetig.

  Für $x = 2$ gilt

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 - x^2 = 2 - 2^2 = -2 = f(2) = 2 - 2^2 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{4}{x} = -2 = f(2)$$

  Somit ist $f(x)$ stetig für $x = 2$.

  Für $x = -2$ gilt

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2 - x^2 = 2 - (-2)^2 = -2 = f(-2) = 2 - (-2)^2 \text{ und}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} -\frac{4}{-x} = -2 = f(-2)$$

  Somit ist $f(x)$ stetig für $x = -2$.

  Zusammenfassend gilt $S = D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Differenzierbarkeit:

  Für $|x| > 2$ ist $f(x) = 2 - x^2$ als Polynom differenzierbar; $f'(x) = -2x$.

Für $0 < x < 2$ ist $f(x) = -4/x$ differenzierbar als Quotient zweier differenzierbaren Funktionen wobei die Ableitung der Nennerfunktion ungleich Null ist; $f'(x) = 4/x^2$.

Für $-2 < x < 0$ ist $f(x) = -4/(-x) = 4/x$ differenzierbar als Quotient zweier differenzierbaren Funktionen wobei die Ableitung der Nennerfunktion ungleich Null ist; $f'(x) = -4/x^2$.

Für $x = 0$ ist $f(x)$ nicht definiert und somit auch nicht differenzierbar.

Für $x = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2-(2+h)^2-(2-2^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2-4-4h-h^2+2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{-4h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+}(-4-h) = -4 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-4/(2+h)-(2-2^2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{-4+2(2+h)}{2+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-4+4+2h}{(2+h)h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2}{2+h} = 1 \neq -4 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Somit existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ nicht, weil die einseitigen Grenzwerte unterschiedliche Werte haben. Daher ist $f(x)$ für $x = 2$ nicht differenzierbar.

Für $x = -2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(-2+h)^2-(2-(-2)^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-4+4h-h^2+2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{4h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-}(4-h) = 4 \qquad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{4/(-2+h)-(2-(-2)^2)}{h} \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{4+2(-2+h)}{-2+h}}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{4-4+2h}{(-2+h)h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2}{-2+h} = -1 \neq 4 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Somit existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ nicht weil die einseitigen Limes unterschiedliche Werte haben. Daher ist $f(x)$ für $x = -2$ nicht differenzierbar.

Zusammenfassend gilt $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}$ und

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & |x| > 2 \\ \frac{4}{x^2} & 0 < x < 2 \\ -\frac{4}{x^2} & -2 < x < 0 \end{cases}$$

- Einsitige Ableitungen:

  Für $x = 2$ folgt aus den Gleichungen (1) bzw. (2):

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -4$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$

  Für $x = -2$ folgt aus den Gleichungen (4) bzw. (3):

$$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = 4$$

  Für $x = 0$ ist $f(x)$ nicht definiert und somit existieren die einseitigen Ableitungen nicht.

- Grenzwerte am Rande des Definitionsbereiches:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 - x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2 - x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} -\frac{4}{|x|} = -\infty$$

Beispiel 2

Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)^a < e^{-x} \text{ für } 0 < x < a$$

Lösung

Da die Funktion $\ln(x)$ streng monoton steigend ist, ist die gegebene Ungleichung äquivalent zu:

$$\ln\left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^a\right] < \ln(e^{-x}) \qquad \text{für } 0 < x < a. \tag{5}$$

Die Ungleichung (5) kann weiter umgeformt werden:

$$a \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) < -x \qquad \text{für } 0 < x < a \tag{6}$$

Sei $f(x) = a\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)+x$ für $x \in [0,a)$. Für die Ableitung $f'(x)$ und $x \in (0,a)$ gilt:

$$f'(x) = \left(a\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)+x\right)' = a\frac{1}{1-\frac{x}{a}}(-\frac{1}{a})+1 = -\frac{a}{a-x}+1 = \frac{-x}{a-x}.$$

Außerdem gilt $\frac{-x}{a-x} < 0$ weil $-x < 0$ und $x < a$.
Aus der Negativität von $f'(x)$ in $(0,a)$ folgt, dass $f(x)$ streng monoton fallend in $[0,a)$ ist. Somit gilt folgende Ungleichung für alle $x \in (0,a)$

$$a\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)+x = f(x) < f(0) = a\ln(1)+0 = 0.$$

Beispiel 3
Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})^{e^x-1}$$

Lösung
Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x}) = e^0 - e^0 = 0$$

und

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = e^0 - 1 = 0.$$

Somit liegt beim gegebenen Limes eine unbestimmte Form "0^0" vor. Die wird folgendermaßen umgeformt:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})^{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\ln\left((e^x - e^{-x})^{e^x-1}\right)\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to 0}[(e^x-1)\ln(e^x - e^{-x})]\right), \tag{7}$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt.
Da $\lim_{x\to 0}\ln(e^x - e^{-x}) = \lim_{t\to 0}\ln(t) = -\infty$ gilt, liegt bei

$$\lim_{x\to 0}[(e^x-1)\ln(e^x - e^{-x})]$$

eine unbestimmte Form "$0\cdot\infty$" vor. Diese kann in einer unbestimmen Form "$\frac{0}{0}$" umgeformt werden :

$$\lim_{x\to 0}[(e^x-1)\ln(e^x - e^{-x})] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{e^x-1}}$$

Durch die Anwendung der Regel von de l'Hôpital erhält man folgende Gleichungen (De l'Hôpital ist hier anwendbar weil Zähler und Nenner differenzierbar sind und die Ableitung der Nennerfunktion ist ungleich 0 ist, in einer Umgebung von 0 exclusive dem Punkt 0 selbst):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-e^{-x})}{\frac{1}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}{\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})(e^x-1)^2}{-e^x(e^x-e^{-x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})(e^{2x}-2e^x+1)}{-e^{2x}+e^0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^x+e^x-2e^0+e^{-x}}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-2e^{2x}+2e^x+e^{-x}-2}{1-e^{2x}}$$

Beim letzten Limes liegt wieder eine unbestimmte Form “$\frac{0}{0}$” vor, die wieder durch die Anwendung der Regel von de l’Hôpital behandelt wird (die oben genannten Bedingungen für die Anwendung von de l’Hôpital sind wieder erfüllt)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-2e^{2x}+2e^x+e^{-x}-2}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-4e^{2x}+2e^x-e^{-x}}{-2e^{2x}} = \frac{0}{-2} = 0$$

Setzt man dieses Ergebnis in (7) ein, erhält man

$$\lim_{x\to 0}(e^x-e^{-x})^{e^x-1} = \exp(0) = 1\,.$$

Beispiel 4

Bestimmen Sie für die untenstehende Funktion $f(x)$ den maximalen Definitionsbereich und die maximalen Monotonie- und Konvexitätsintervalle. Besitzt diese Funktion lokale bzw. globale Extrema? Wenn ja, dann geben Sie alle Extrema an. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion am Rande des Definitionsbereiches.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Lösung

- Definitionsbereich D:

  $D = \mathbb{R}$ weil für den Nenner folgendes gilt: $x^2+1 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Monotonie:

  $\forall x \in \mathbb{R}$ ist die erste Ableitung $f'(x)$ folgendermaßen gegeben:

  $$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \tag{8}$$

  Wie untersuchen das Vorzeichen von $f'(x)$ und dieses stimmt mit dem Vorzeichen des Zählers $-x^2-2x+1$ überein weil der Nenner als Quadrat stets positiv ist.

  Die Nullstellen von $-x^2-2x+1=0$ sind folgendermaßen gegeben:

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{-2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Somit gilt $-x^2 - 2x + 1 > 0$ für $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$ und $-x^2 - 2x + 1 < 0$ für $x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$. Weiters gilt unter Berücksichtigung von (8): $f' > 0$ für $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$ und $f' < 0$ für $x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$. Daraus folgt:

$f(x)$ ist streng monoton steigend für $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$, und

$f(x)$ ist streng monoton fallend für $x < -1 - \sqrt{2}$ oder $x > -1 + \sqrt{2}$.

- Konvexität:

  $\forall x \in \mathbb{R}$ ist die zweite Ableitung $f''(x)$ folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= (x^2+1)\frac{-2(x^3+x+x^2+1) + 4x^3 + 8x^2 - 4x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 2x^2 - 2 + 4x^3 + 8x^2 - 4x}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Wir untersuchen das Vorzeichen von $f''(x)$ und dieses stimmt mit dem Vorzeichen des Zählers $2(x-1)(x^2+4x+1)$ überein weil der Nenner als Potenz eines Quadrats stets positiv ist. Der Zähler ist positiv wenn die Faktoren $x - 1$ und $x^2 + 4x + 1$ dasselbe Vorzeichen haben und negativ sonst.

$x - 1$ ist negativ für $x < 1$ und positiv für $x > 1$.

Die Nullstellen von $(x^2 + 4x + 1)$ sind folgendermaßen gegeben:

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

und es gilt $-2 - \sqrt{3} < -2 + \sqrt{3} \approx -0.37 < 1$.

Es gilt also $x^2 + 4x + 1 < 0$ für $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ und $x^2 + 4x + 1 > 0$ für $x < -2 - \sqrt{3}$ oder $x > -2 + \sqrt{3}$.

Für das Produkt $(x-1)(x^2+4x+1)$ gilt also:

$(x-1)(x^2+4x+1) < 0$ für $x < -2 - \sqrt{3}$ oder $-2 + \sqrt{3} < x < 1$, und

$(x-1)(x^2+4x+1) > 0$ für $-2 + \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ oder $x > 1$

Daraus folgt für das Vorzeichen von $f''(x)$:

$f''(x) < 0$ für $x < -2 - \sqrt{3}$ oder $-2 + \sqrt{3} < x < 1$, und

$f''(x) > 0$ für $-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$ oder $x > 1$

Somit sind die Konvexitätsintervalle von $f(x)$ folgendermaßen gegeben:

f ist konkav für $x < -2-\sqrt{3}$ oder $-2+\sqrt{3} < x < 1$, und

f ist konvex für $-2-\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{3}$ oder $x > 1$

- Verhalten am Rande des Definitionsbereiches:

  Es gilt

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$$

  weil beide Nenner und Zähler Polynome sind und der Grad des Nenners höher als der Grad des Zählers ist.

- Extrema:

  Für $x_1 = -1-\sqrt{2}$ gilt $f'(x_1) = 0$ und $f(x)$ monoton fallend für $x < x_1$ und monoton steigend für $x_1 < x < -1+\sqrt{2}$. Somit liegt in $x_1 = -1-\sqrt{2}$ ein lokales Minimum mit Wert $f(x_1) \approx -0.2071$ vor.

  Für $x_2 = -1+\sqrt{2}$ gilt $f'(x_2) = 0$ und $f(x)$ monoton steigend für $x_1 < x < x_2$ und monoton fallend für $x > x_2$. Somit liegt in $x_2 = -1+\sqrt{2}$ ein lokales Maximum mit Wert $f(x_2) \approx 1.2071$ vor.

  Es gibt keine anderen lokalen Extrema weil es außer x_1, x_2 keine weiteren stationären Punkte der überall differenzierbaren Funktion $f(x)$ gibt.

  Da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ und $0 > f(x_1)$ ist $f(x_1)$ auch ein globales Minimum. Analog, da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ und $f(x_2) > 0$ ist $f(x_2)$ auch ein globales Maximum.