Analysis 2, SS 2010, 8. Übungsblatt

36. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$y = 2\cosh\frac{x}{2}$$

von $x = 0$ bis $x = 2$. Bestimmen Sie weiters den Tangenten- und Normalvektor.

37. Bestimmen Sie die Krümmung der Raumkurve

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\ln(1+\sin(t)) \\ e^{1-\sin(t)} \\ \cos(t) + t \end{pmatrix}$$

im Punkt $P(0 \mid e \mid -1+\pi)$.

38. Bestimmen Sie die Krümmung und Torsion der Raumkurve

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}$$

im Punkt $P(2\pi, y, z)$.

39. Betrachten Sie die Zykloide, die durch folgende Parameterdarstellung gegeben ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \leq t \leq 2\pi$.
   (b) Bestimmen Sie den Tangenten- und den Hauptnormalenvektor.
   (c) Bestimmen Sie die Kümmung in Abhängigkeit von t.
   (d) Berechnen Sie den Radius und Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t = \pi$.

Hinweis: $2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t$.

40. Gegeben sei die Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit

$$x(t) = t, \quad y(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad z(t) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t} - \frac{t}{2}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge für $0 \leq t \leq 1/2$.

41. Gegeben sei die Raumkurve in Polarform mit

$$r = 2R(1+\cos\phi) \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Berechnen Sie die Länge dieser Kurve.

42. Berechnen Sie die Evolute einer Ellipse und stellen Sie diese graphisch dar!

43. Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 + te^t \\ t + t^2 e^t \end{pmatrix}$$

im Punkt $(1, 1, 0)$.

44. Gegeben sei die folgende Kurve im $\mathbb{R}^3$:

$$x(t) = \frac{1}{2}(1+\cos t),\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t,\ z(t) = \frac{1}{2}(1-\cos t).$$

(a) Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion!

(b) Für welche Werte des Parameters t ist die Krümmung maximal bzw. minimal?

45. Gegeben sei folgende Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos(2t) \\ e^{4t}\sin(2t) \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \le t \le 2$.

(b) Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein, wobei die Bogenlänge im Punkt $(e^{4\pi}, 0, e^{4\pi})$ gleich 0 sei.

(c) Berechnen Sie die Schmiegebene für den Parameterwert $t_0 = 0$.