Analysis 2, SS 2010, 3. Übungsblatt

15. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} (x+1)^{2n}$$

16. Berechnen Sie mit Hilfe von Potenzreihenansätzen die folgenden Grenzwerte:

    (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

    (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

    (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x}$

    (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-3x}{e^x - 1} - \dfrac{2}{x}$

17. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^4 x^2}$$

    (a) für jedes $a > 0$ auf $[a, \infty)$ gleichmäßig konvergiert,

    (b) auf $[0, \infty)$ punktweise konvergiert,

    (c) auf $[0, \infty)$ nicht gleichmäßig konvergiert.

18. Geben Sie eine Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ um den Nullpunkt an! (Hinweis: Cauchy-Produkt!)

19. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$ in eine Taylorreihe!

20. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ in eine Reihe durch

    (a) gliedweise Differentation;

    (b) das Produkt zweier geometrischer Reihen.

21. Zu $a > 0$ ermittle man eine wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf dem Intervall $[0, a]$ gleichmäßig gegen die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x^2$ konvergiert. Man berechne so die Integrale

$$\int_0^a x\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^a x^2\,dx$$

22. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn es eine reelle Zahl $K \geq 0$ gibt, so dass für jede endliche Folge $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ mit $a \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leq b$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq K.$$

    Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ auf $[0, 1]$ nicht von beschränkter Variation ist, aber regulär ist.