# Einige Bemerkungen zur Integration

**Integrationsregeln:**

| | |
|---|---|
| Linearität: | $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$ |
| partielle Integration: | $\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$ |
| Substitutionsregel: | $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ |
| logarithmische Regel: | $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert$ |

**Wichtige Substitutionen:**
Im folgenden bezeichne $R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ immer eine rationale Funktion in den Unbekannten $x_1,x_2,\dots,x_n$, dh. es gibt Polynome $P$ und $Q$ mit

$$R(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{P(x_1,x_2,\dots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\dots,x_n)}.$$

**Typ 1:** $\int R(\sinh(x),\cosh(x),\tanh(x),\coth(x),\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$
Man drücke $\sinh(x)$ usw. durch $\mathrm{e}^x$ aus und verwende die Substitution $t=\mathrm{e}^x$ und $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}x$. So erhält man ein Integral über eine rationale Funktion in $t$, die mit Partialbruchzerlegung gelöst werden kann. Es gilt:

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

**Typ 2:** $\int R(\sin(x),\cos(x),\tan(x),\cot(x))\,\mathrm{d}x$
Man verwende die Substitution $t=\tan(\frac{x}{2})$, es gilt:

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Dies führt zu einem Integral über eine rationale Funktion in $t$.

**Typ 3:** $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ mit $ad-bc\neq 0$ und $n=2,3,4,\dots$
Man benutze die folgende Substitution, die zu einem Integral über eine rationale Funktion in $t$ führt:

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\quad \mathrm{d}x = n(ad-bc)\frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{(a-ct^n)^2}$$

**Typ 4:** $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ mit $a\neq 0$
Durch geeignete Substitution (Quadratisches Ergänzen) bringe man das Integral auf eine der drei Formen:

$$\text{(a) } \int R(x,\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b) } \int R(x,\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x \qquad \text{(c) } \int R(x,\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$$

ad (a): Man benutze die Substitution $x=\sin(t)$ mit $\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Das führt zu einem Integral vom Typ 2.
ad (b): In diesem Fall funktioniert die Substitution $x=\sinh(t)$ mit $\mathrm{d}x=\cosh(t)\,\mathrm{d}t$. So erhält man ein Integral vom Typ 1.
ad (c): Unter Verwendung der Substitution $x=\cosh(t)$ und $\mathrm{d}x=\sinh(t)\,\mathrm{d}t$ erhält man ein Integral vom Typ 1.

**Partialbruchzerlegung:** $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$
Der Grad des Polynoms $P(x)$ sei echt kleiner als der von $Q(x)$ (andernfalls bringt eine Polynomdivision das Gewünschte). Im ersten Schritt zerlegt man den Nenner $Q(x)$ in $(x-a_1)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\nu_n}\cdot(x^2+b_1)^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_m)^{\mu_m}$ mit $a_i\in\mathbb{R}$ und $b_j>0$. Im nächsten Schritt bestimmt man die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; & \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)^1}+\frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1,\nu_1}}{(x-a_1)^{\nu_1}}+\ldots\ldots+\frac{A_{n,1}}{(x-a_n)^1}+\ldots+\frac{A_{n,\nu_n}}{(x-a_n)^{\nu_n}}+\\ & \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+b_1)^1}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1,\mu_1}x+C_{1,\mu_1}}{(x^2+b_1)^{\mu_1}}+\ldots\ldots+\frac{B_{m,1}x+C_{m,1}}{(x^2+b_m)^1}+\ldots+\frac{B_{m,\mu_m}x+C_{m,\mu_m}}{(x^2+b_m)^{\mu_m}}\end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren kann man mit Koeffizientenvergleich die Konstanten $A_{i,j}$ und $B_{k,l},C_{k,l}$ bestimmen. Die einzelnen Summanden kann man mehr oder weniger elementar integrieren ($n>1$):

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{x^{1-n}}{1-n} \qquad \int\frac{ax+b}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln(x^2+1)+b\arctan(x)$$

$$\int\frac{ax+b}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{bx-a}{(x^2+1)^{n-1}}+\int\frac{(2n-3)b}{(x^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}x\right]$$