Analysis 2, SS 2008, 8. Übungsblatt

32. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve
$$y = 2\cosh\frac{x}{2}$$
von $x = 0$ bis $x = 2$. Bestimmen Sie weiters den Tangenten- und Normalvektor.

33. Betrachten Sie die Zykloide, die durch folgende Parameterdarstellung gegeben ist:
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$
   (a) Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \le t \le 2\pi$.
   (b) Bestimmen Sie den Tangenten- und den Hauptnormalenvektor.
   (c) Bestimmen Sie die Kümmung in Abhängigkeit von t.
   (d) Berechnen Sie den Radius und Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t = \pi$.

   Hinweis: $2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t$.

34. Gegeben sei die Raumkurve in Polarform mit
$$r = 2R(1 + \cos\phi) \qquad 0 \le \phi \le 2\pi.$$
Berechnen Sie die Länge dieser Kurve.

35. Berechnen Sie die Evolute einer Ellipse und stellen Sie diese graphisch dar!

36. Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Kurve
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ c\,t \end{pmatrix} \qquad a, c \in \mathbb{R}.$$

37. Gegeben sei die folgende Kurve im $\mathbb{R}^3$:
$$x(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t),\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t,\ z(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t).$$
   (a) Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion!
   (b) Für welche Werte des Parameters t ist die Krümmung maximal bzw. minimal?

38. Gegeben sei folgende Raumkurve
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{4t}\cos(2t) \\ e^{4t}\sin(2t) \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \le t \le 2$.
   (b) Führen Sie die Bogenlänge als Parameter ein, wobei die Bogenlänge im Punkt $(e^{4\pi}, 0, e^{4\pi})$ gleich 0 sei.
   (c) Berechnen Sie
      i. das begleitende Dreibein,
      ii. die Krümmung und Torsion,
      iii. die Schmiegebene

      für den Parameterwert $t_0 = 0$.

39. Zeigen Sie: Die Normale im Punkt P einer Kurve C ist Tangente ihrer Evolute im Punkt M, wobei M der Krümmungsmittelpunkt der Kurver für den Punkt P ist.