Analysis 2, SS 2008, 10. Übungsblatt

47. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x^2, xy, xy^2)$$
$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto (\sin u, \cos(vw))$$

Bestimmen Sie die Funktion $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von h direkt und mit Hilfe der Kettenregel!

48. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt (x_0, y_0) (bis zu Gliedern einschließlich 2. Ordnung):

(a) $f(x, y) = x^2 \sin \frac{xy}{2}, \quad (x_0, y_0) = (1, \pi)$

(b) $f(x, y) = \sin(xy) + x \ln y, \quad (x_0, y_0) = (-\pi, 1)$

54. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) := 0$. Zeigen Sie: f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig. Die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch $(0, 0)$ ist ebenfalls stetig, im Nullpunkt ist f jedoch nicht stetig!

55. Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to R$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seien definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y^5}{2x^4 + y^4} & \text{für}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und $g(t) = (t, t)$.

(a) Zeigen Sie, dass f im Ursprung stetig und partiell nach x und y differenzierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f \circ g$ im Nullpunkt und bestimmen Sie die Funktionalmatrix von g im Punkt 0. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle (f_x(0, 0), f_y(0, 0)), J_g(0) \rangle$! Warum steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zur Kettenregel?