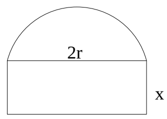
Analysis 2, SS 2008, 1. Übungsblatt

1. Ein Rundbogenfenster hat die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten Halbkreis (vgl. Abbildung). Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden, damit bei gegebenen Umfang U die Fläche maximal wird?



2. Nach Planck wird das Emissionsvermögen eines schwarzen Strahlers der Temperatur T (Kelvin-Skala) beschrieben durch
$$E(\lambda) = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{ch}{kT\lambda}\right) - 1}, \quad 0 < \lambda < \infty$$
(λ Wellenlänge; c, h, k positive Konstanten).
Man zeige: $E(\lambda)$ hat genau eine Maximalstelle λ_m, und es gilt $\lambda_m \cdot T = const.$ (Wiensches Verschiebungsgesetz).

3. Zeigen Sie: die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ besitzt drei Wendepunkte und diese liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

4. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Monotonierverhalten, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Skizze):

   (a) $f(x) = (x^2 - 1)e^{-|x|}$,
   (b) $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$,
   (c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + \ln|x-1|$,
   (d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

5. Man bestimme das n-te Taylorpolynom $T_n(x, x_0; f)$ und das n-te Lagrangesche Restglied für die folgenden Funktionen um die angegebenen Entwicklungspunkte x_0:

   (a) $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$ bzw. $x_0 = 1$ wobei $a > 0$,

   (b) $f(x) = \sin^2(x)$, $x_0 = 0$.

6. Ersetzen Sie folgende Funktionen durch ihre Taylorpolynome $T_n(x, x_0; f)$ wobei n der angegebene Grad des Polynoms ist und x_0 jener Punkt um den $f(x)$ approximiert wird. Schätzen Sie den Fehler im angegebenen Bereich ab.

   (a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ durch $T_2(x, 0; f)$ in $|x| \leq 1/10$,

   (b) $f(x) = \exp(\sin^2 x)$ durch $T_2(x, \pi/4; f)$ in $|x - \pi/4| \leq 1/10$.