30.11.2011

Kap 5 Kegelschnitte

5.1. Kreis

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Mittelpunkt gegebenen Abstand haben.

Koordinatisierung: Mittelpunkt $M = (a, b)$, Radius $r > 0$ } gegeben.

$$\text{Kreis} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = r \right\}.$$

Forme Gleichung um:

$$\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right\|}_{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = r$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$ Kreisgleichung.

Beispiel 1 Geg. Glg $2x^2 + 9x + 2y^2 + 5y = 30$. Ist das ein Kreis?
Mittelpunkt? Radius?

$$x^2 + \frac{9}{2}x + y^2 + \frac{5}{2}y = 15$$

$$\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 15$$

$$\left(x - \left(-\frac{9}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2 = \underbrace{15 + \frac{53}{8}}$$

$$= \frac{173}{8} = \left(\sqrt{\frac{173}{8}}\right)^2$$

Also: Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{173}{8}}$.

Beispiel 2. Gegeben seien 3 Punkte $A=(4,5)$ $B=(5,4)$ $C=(-2,5)$.
Gesucht: Gleichung des Kreises durch diese 3 Punkte.

Variante 1: Umkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Seiten-symmetralen
(Seitenhalbierender; normal auf jeweilige Seite)
Radius als Abstand zwischen Umkreismittelpunkt und einem Eckpunkt.

Variante 2: Unbestimmter Ansatz. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2=r^2$$

(A) I $\quad 16-8a+a^2+25-10b+b^2=r^2$

(B) II $\quad 25-10a+a^2+16-8b+b^2=r^2$

(C) III $\quad 4+4a+a^2+25-10b+b^2=r^2$

I − II $\quad 2a-2b=0. \Rightarrow$

I − III $\quad 12-12a=0 \Rightarrow a=1$

$a=1;\quad a=b=1.\quad$ Mittelpunkt $(1,1)$.

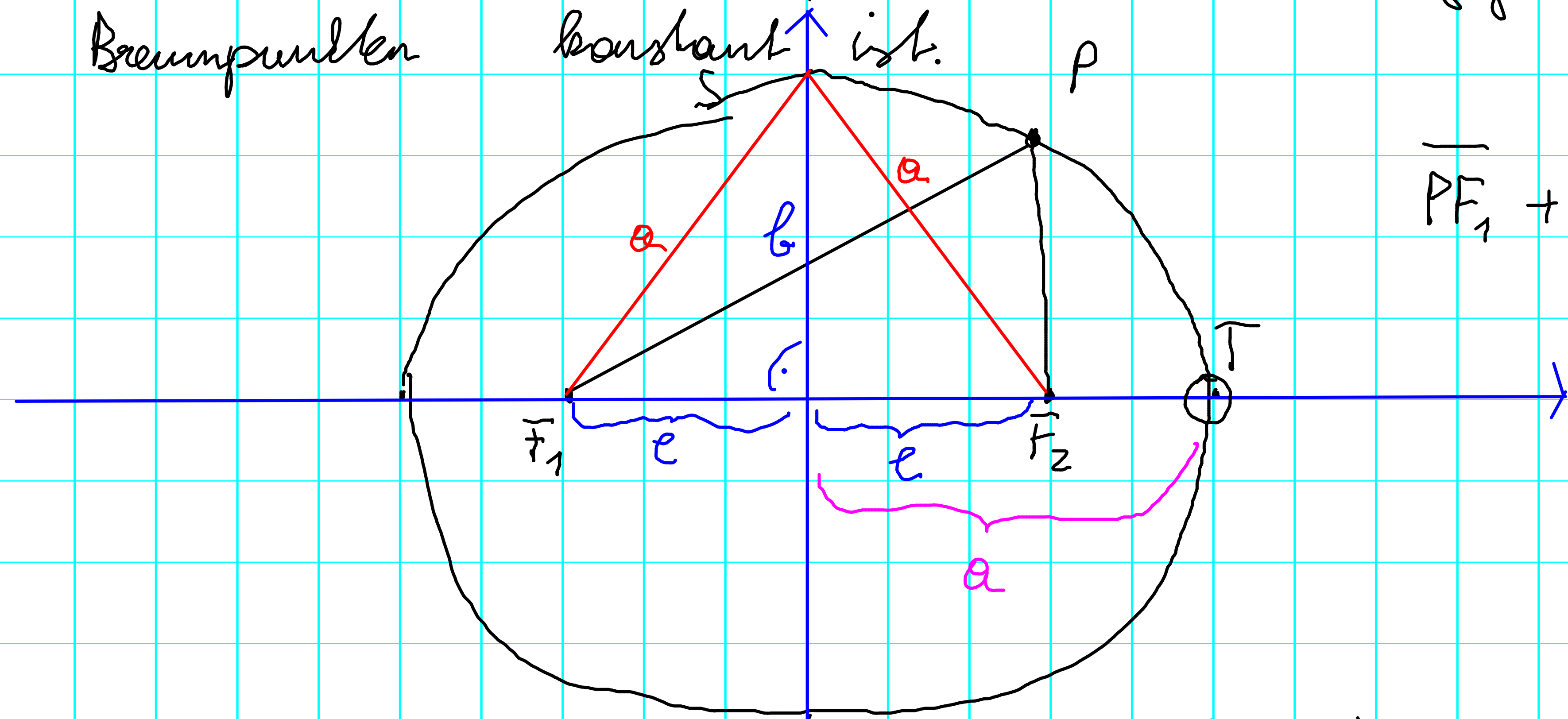
in III eingesetzt: $\cancel{4+4+1}+25\cancel{-10+1}=r^2 \Rightarrow$ Radius 5.

Kreisgleichung $(x-1)^2+(y-1)^2=25$

oder in ausmult. Form $x^2-2x+y^2-2y=23$

5.2. Ellipse

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte in der Ebene, sodass die Summe der Abstände von zwei gegebenen Brennpunkten konstant ist.



$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\text{const.}$

Wir betrachten den Fall $F_1=(-e,0)$ $F_2=(e,0)$

Die Summe der Abstände heiße $2a$.

Schnittpunkt mit y-Achse: $S = (0, b)$

Aus Symmetriegründen gilt $\overline{SF_1} = \overline{SF_2} = a$

Somit: $\boxed{e^2 + b^2 = a^2}$

Schnittpunkt mit positiver x-Achse: $T = (x, 0)$ für passendes x.

$$\overline{TF_1} = x + e$$
$$\overline{TF_2} = x - e$$

$$2a = \overline{TF_1} + \overline{TF_2} = 2x$$

Schnittpunkt mit positiver x-Achse: $\Rightarrow x = a.$ $F(a, 0)$.

a und b heißen auch Halbachsenlängen der Ellipse.

Gleichung der Ellipse:

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \qquad \Big|^2$$

$$x^2 + \cancel{2ex} + e^2 + y^2 + 2\sqrt{\left((x+e)^2 + y^2\right)\left((x-e)^2 + y^2\right)} + x^2 - \cancel{2ex} + e^2 + y^2 = 4a^2$$

$$\sqrt{\left((x+e)^2+y^2\right)\left((x-e)^2+y^2\right)} = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2$$

Es muss $2a^2 - e^2 > x^2 + y^2$ gelten.

Quadriere.

$$(x+e)^2(x-e)^2 + y^2\left((x+e)^2 + (x-e)^2\right) + y^4 = (2a^2-e^2)^2 - 2(a^2-e^2)(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2$$

$$(x^2-e^2)^2 + y^2\left(\cancel{x^2} + \cancel{2ex} + \cancel{e^2} + \cancel{x^2} - \cancel{2ex} + \cancel{e^2}\right) + \cancel{y^4} =$$

$$= 4a^4 - 4a^2e^2 + e^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2e^2x^2 + \cancel{2e^2y^2} + x^4 + \cancel{2x^2y^2} + \cancel{y^4}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^4} - 2e^2x^2 + \cancel{e^4} = 4a^4 - 4a^2e^2 + \cancel{e^4} - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2e^2x^2 + \cancel{x^4}$$

$$\cancel{4}x^2(a^2-e^2) + \cancel{4}y^2a^2 = \cancel{4}a^2(a^2-e^2) \qquad \Big| : a^2(a^2-e^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1.$$

Wegen $e^2 + b^2 = a^2$ ergibt sich

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

oder $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Man nehme Kreis mit Radius 1, multipliziere x-Koordinate mit a und y-Koordinate mit b. und erhalte Ellipse mit Hauptachsenlängen a und b.

5.3. Hyperbel:

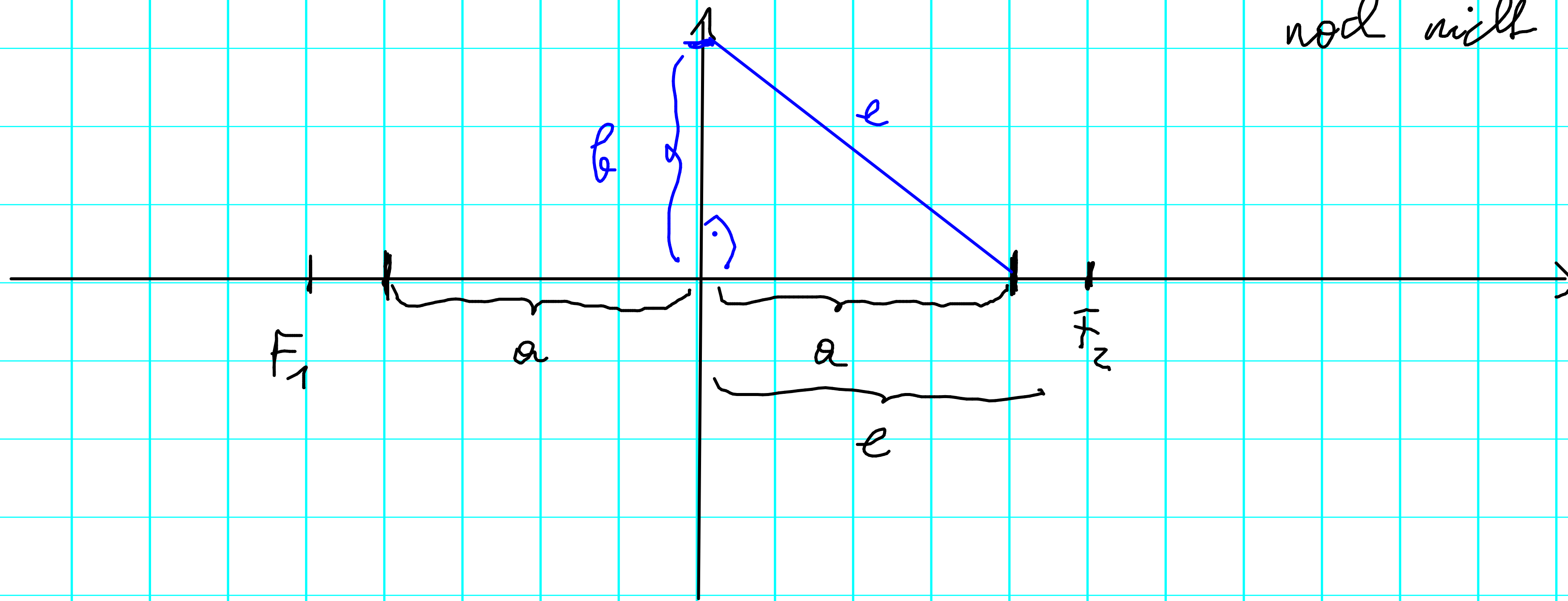
Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, sodass der Absolutbetrag der Differenz zu zwei gegebenen Brennpunkten konstant ist.

$F_1 = (-e, 0)$
$F_2 = (e, 0)$

$$\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2a.$$

Gleiche Rechnung wie oben: $2a^2 - e^2 - x^2 - y^2 < 0$.

erhalte: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$ wobei wir diesmal b noch nicht definiert haben.



Definiere $e^2 - a^2 =: b^2$.

Hyperbelgleichung: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

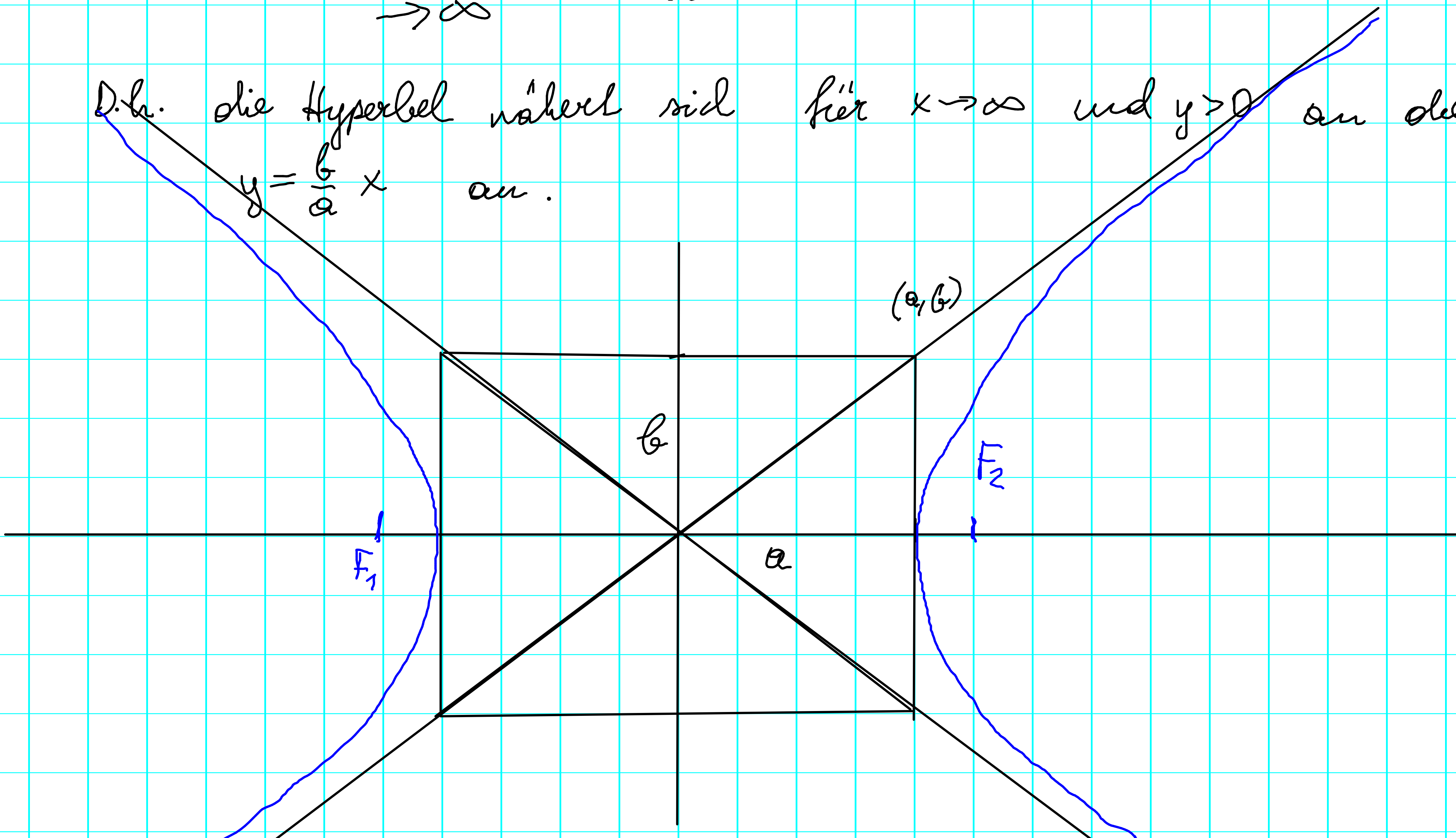
$e^2 = a^2 + b^2$

Es gilt $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \iff$ für pos. y: $y = \underbrace{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}}_{\approx \frac{b}{a}x}$

Betrachte Differenz $\lim_{x\to\infty} y - \frac{b}{a}x = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} - \frac{b}{a}x\right) =$

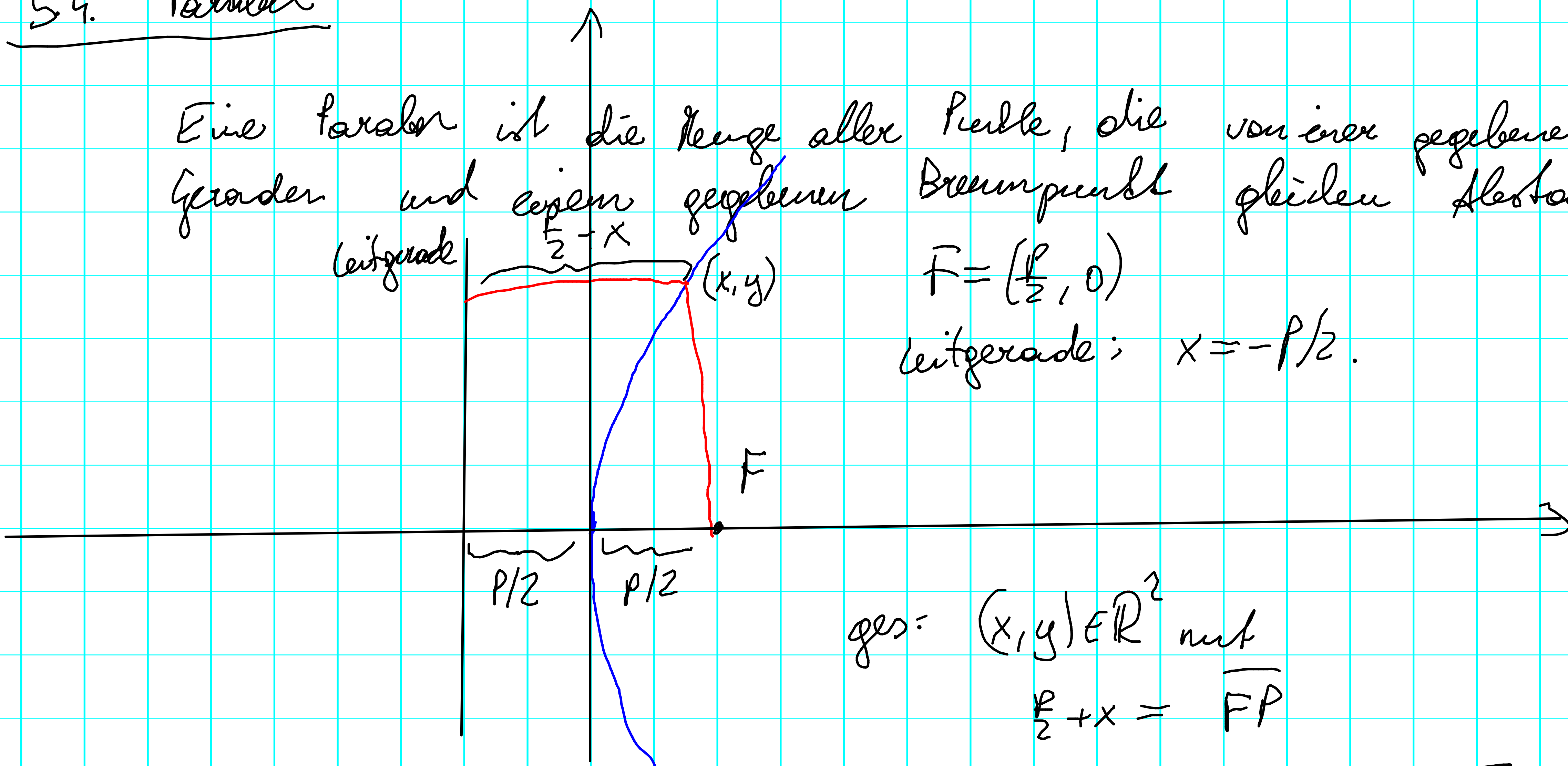
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{\frac{b^2}{a^2}x^2} - b^2 - \cancel{\frac{b^2}{a^2}x^2}}{\underbrace{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{b}{a}x}_{\to\infty}} = 0.$$

D.h. die Hyperbel nähert sich für $x \to \infty$ und $y > 0$ an die Gerade $y = \frac{b}{a}x$ an.



5.4. Parabel

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Brennpunkt gleichen Abstand haben



$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Leitgerade: $x = -p/2$.

ges: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\frac{p}{2} + x = \overline{FP}$$

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$