11.10.2011

Kap 3. Kombinatorik

... Abzählen von Konfigurationen

Beispiel 1 26 verwirrte Mathematiker besuchen eine Party. Jeder hängt seine Jacke an die Garderobe. Am Ende nimmt jeder zufällig eine Jacke.

- Wie viele Konfigurationen gibt es?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jeder eigene Jacke erwischt

$$26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 26!$$

Erster hat 26 Möglichkeiten
Zweite 25 Möglichkeiten
Dritte ... 24 Mögl
⋮
25. hat 2
26. 1

insgesamt

$26\cdot 25 \cdot \ldots \cdot 1$ Möglichkeiten

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{26!}$. (ein günstiger Ausgang durch 26! mögl. Ausgänge)

<u>Definition.</u> Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

„n Fakultät" oder „n Faktorielle".

Zusätzlich setze

$$0! = 1$$

<u>Satz.</u> Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau $n!$ Möglichkeiten, n unterschiedliche Objekte anzuordnen.

<u>Beispiel C2.</u> Wie viele Wörter kann man aus den Buchstaben A, G, R, Z bilden, wenn jeder Buchstabe genau einmal auftritt?

AGRZ	GARZ	RAGZ	ZAGR
AGZR	GAZR	RAZG	ZARG
ARGZ	GRAZ	RGAZ	ZGAR
ARZG	GRZA	RGZA	ZGRA

$24 = 4!$

AZ GR   GZAR   RZAG   ZRAG

AZ RG   GZRA   RZGA   ZRGA

Bemerkung Man spricht auch von Permutationen von n Elementen

Beispiel 3. Wie viele Wörter kann man aus den Buchstaben A, A, G, Z bilden, wobei jeder Buchstabe so oft verwendet werden darf, wie er angegeben ist?

$\frac{4!}{2!}$ vorläufig färbe die A's ein: A A $\Rightarrow 4! = 24$

jeweils zwei Möglichkeiten, die A's zu färben $2! = 2$

$\Rightarrow \frac{24}{2} = 12$

Beispiel 4. gleich wie Bsp 3, aber mit Buchstaben M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I :

M ... 1   P ... 2

I ... 4

S ... 4   insgesamt 11

$$\frac{11!}{4!\,4!\,2!\,1!}$$

Beispiel 5. 193 Studierende, 31 Plätze in Gruppe 2.

Wie viele mögliche Einteilungen gibt es für Gruppe 2?

$$\binom{193}{31} = \frac{193!}{31! \cdot \underbrace{(193-31)}_{162}!}$$

„Auswahl von 31 aus 193"

Binomialkoeffizient

Das entspricht einem Wort mit 31 J („ja, in der Gruppe")
und 162 N („nein, wie leider nicht")

Definition. Seien n und k nichtnegative ganze Zahlen. Dann definiere den BINOMIALKOEFFIZIENTEN

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

„n über k"
„n choose k"

Satz. $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

Spezialfälle:

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{\cancel{n!}}{\underbrace{0!}_{1}\,\cancel{n!}}$$ (leere Menge)

$$\binom{n}{n} = 1 = \frac{n!}{n!\,0!}$$ (Ausgangsmenge)

$$\binom{n}{1} = n = \frac{n!}{\underbrace{1!}_{1}\,(n-1)!} = \frac{n\cdot\overbrace{\cancel{(n-1)}\ \cdots\ 2\cdot 1}^{(n-1)!}}{1!\ \cancel{(n-1)!}} = n.$$

(Nehme einen von n Stück, n Möglichkeiten).

$$\binom{0}{0} = 1$$

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten   Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

1) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ (egal, ob k Elemente ausgewählt oder n-k Elemente nicht ausgewählt)

"Symmetrie"

$$\left[\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(\underbrace{n-(n-k)}_{k})!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \right]$$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

eine Person X besonders wichtig ...

Fall 1: X ist Element der Teilmenge. k-1 Restplätze, n-1 Kandidat:innen $\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

Fall 2: X ist kein Element der Teilmenge. k Restplätze, n − 1 Kandidaten $\Rightarrow \binom{n-1}{k}$

Die zweite Regel führt zur üblichen Darstellung im PASCALschen Dreieck.

$k=n$ $k=0$ $k=1$

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Symmetrie

Satz (Binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\left[(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)(a+b)}^{n} \right.$$

$$\left. = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \right]$$

aus n Klammern
wähle 2mal b.

Bemerkung. Das Mississippi-Beispiel führt auf den sog. MULTINOMIALkoeffizienten

$$\binom{n}{k_1; k_2; \ldots; k_l} = \frac{n!}{k_1! \, k_2! \ldots k_l!}, \quad \text{wobei } k_1 + \ldots + k_l = n$$

Beispiel 6. Wie viele Wörter der Länge 6 kann man aus den Buchstaben G, R, A, Z bilden, wenn jeder Buchstabe beliebig oft (evtl. auch gar nicht) verwendet werden darf?

1. Buchstabe: 4 Mögl. G R A Z
2. Buchstabe 4 Mögl. — " —

⋮

6. Buchstabe 4 Mögl. — " —

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6$$