II Geometrie

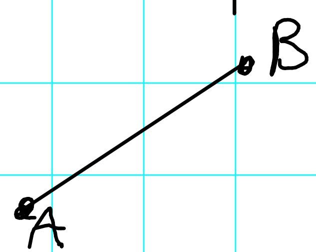
Ein Punkt ist etwas, was keine Teile hat ...

· **Linien** Geraden in beide Richtungen unendlich

Euklid (~ 300 v. chr)

Strahl: in eine Richtung unendlich

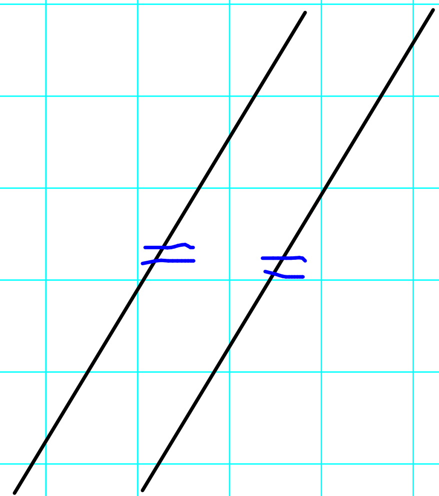
Strecke: zwei Endpunkte

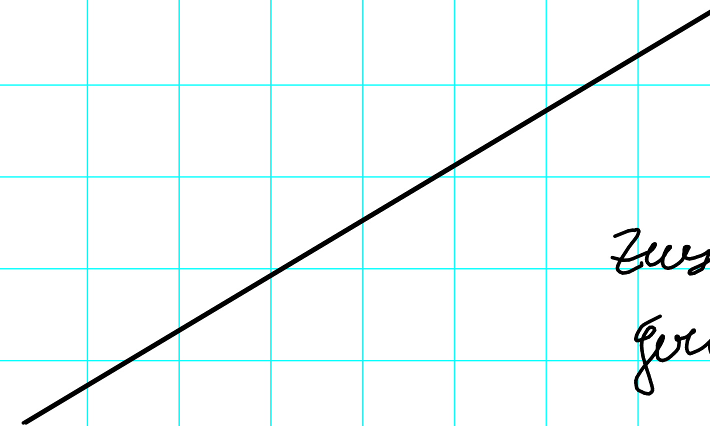


Bezeichne Strecke mit AB

Länge der Strecke $\overline{AB}$

Parallele Geraden: schneiden sich nie oder überall



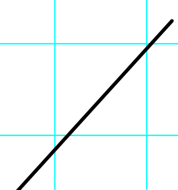


zusammenfallende Geraden

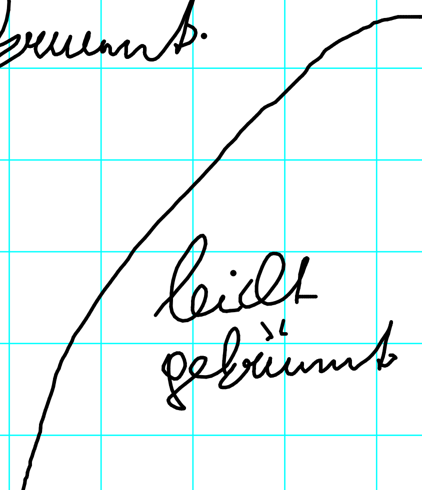
nicht gerade: „gekrümmte Linie".

Kurve: gerade oder „gekrümmt".

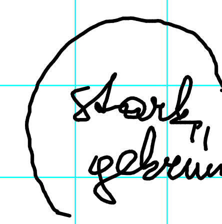
Krümmung einer Kurve:



keine Krümmung



leicht gekrümmt



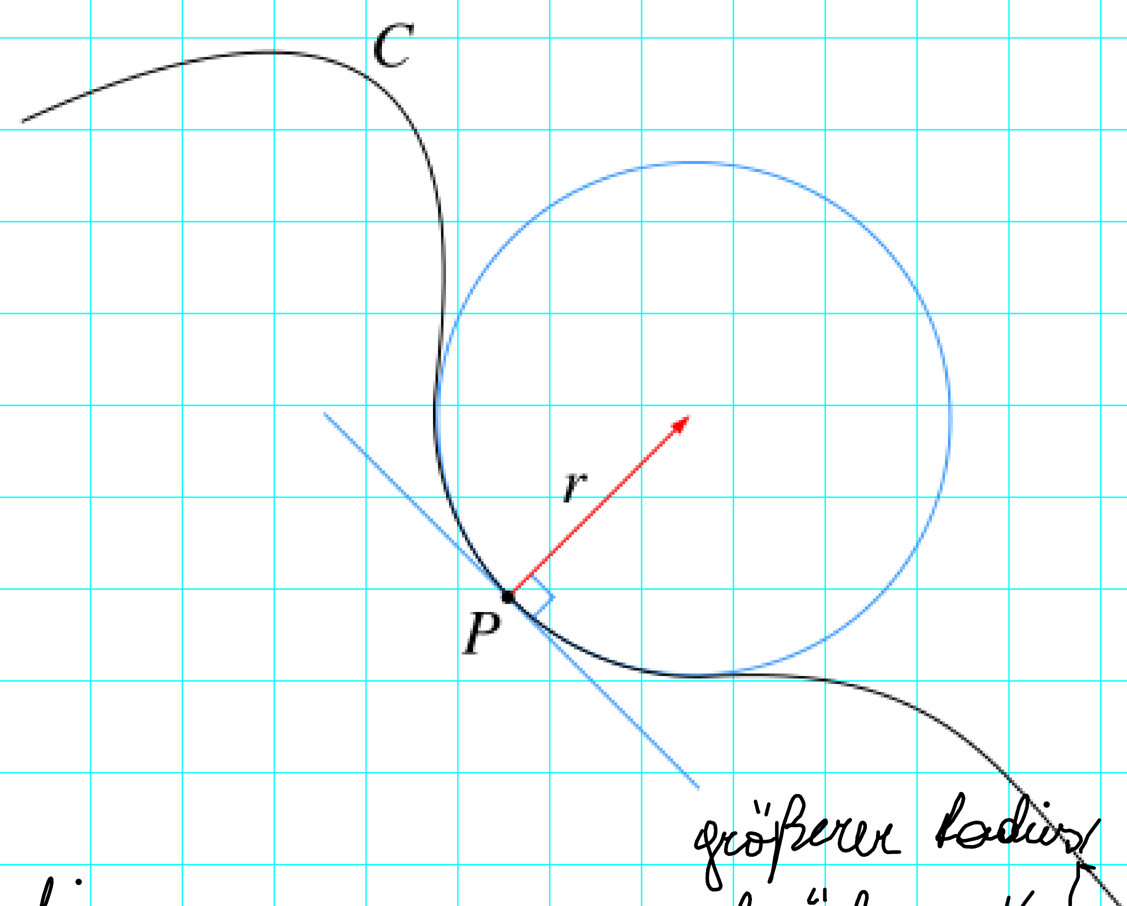
stark gekrümmt

Quantifizieren der Krümmung

Krümmungskreis in einem Punkt P:
Kreis, der Kurve in Punkt am „besten" approximiert

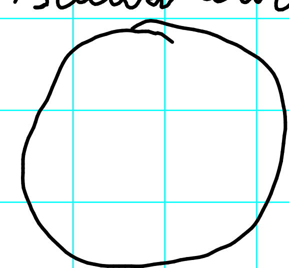
- geht durch selben Punkt P
- Tangenten sollen gleich sein
(Tangente steht normal auf Radius)
- soll sich möglichst gut „anschmiegen"

hier steckt einiges an Differentialrechnung drinnen.

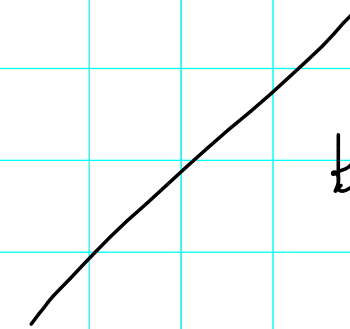


größerer Radius, schwächere Krümmung

kleiner Radius, starke Krümmung

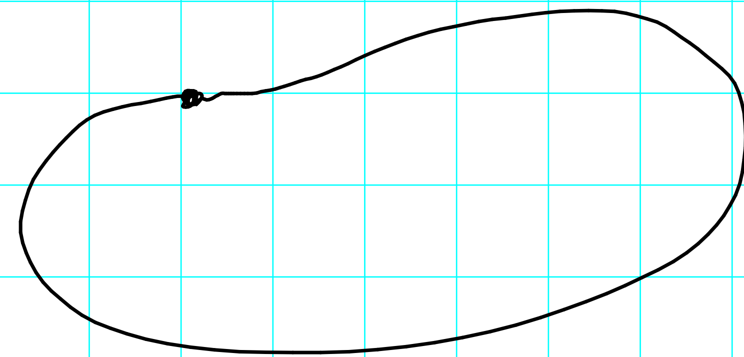


Radius ∞
Krümmung 0.



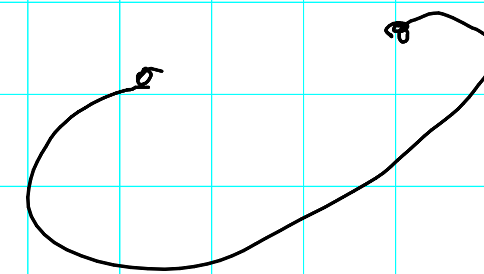
Definiere $\text{Krümmung} = \dfrac{1}{\text{Krümmungskreisradius}}$.

geschlossene Kurve

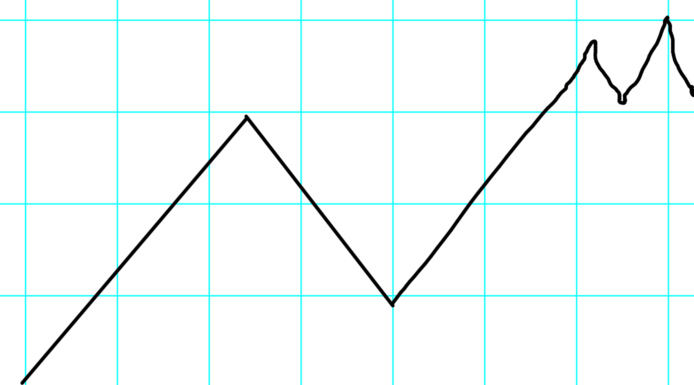


Start- und Endpunkt fallen zusammen

Gegenteil: offene Kurve

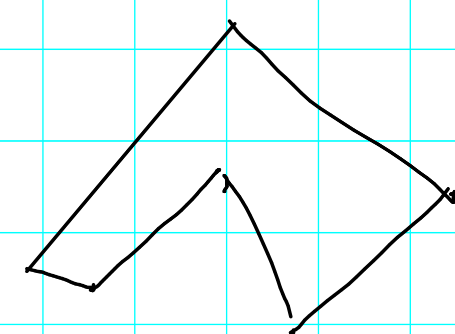


Streckenzug (Polygonzug)



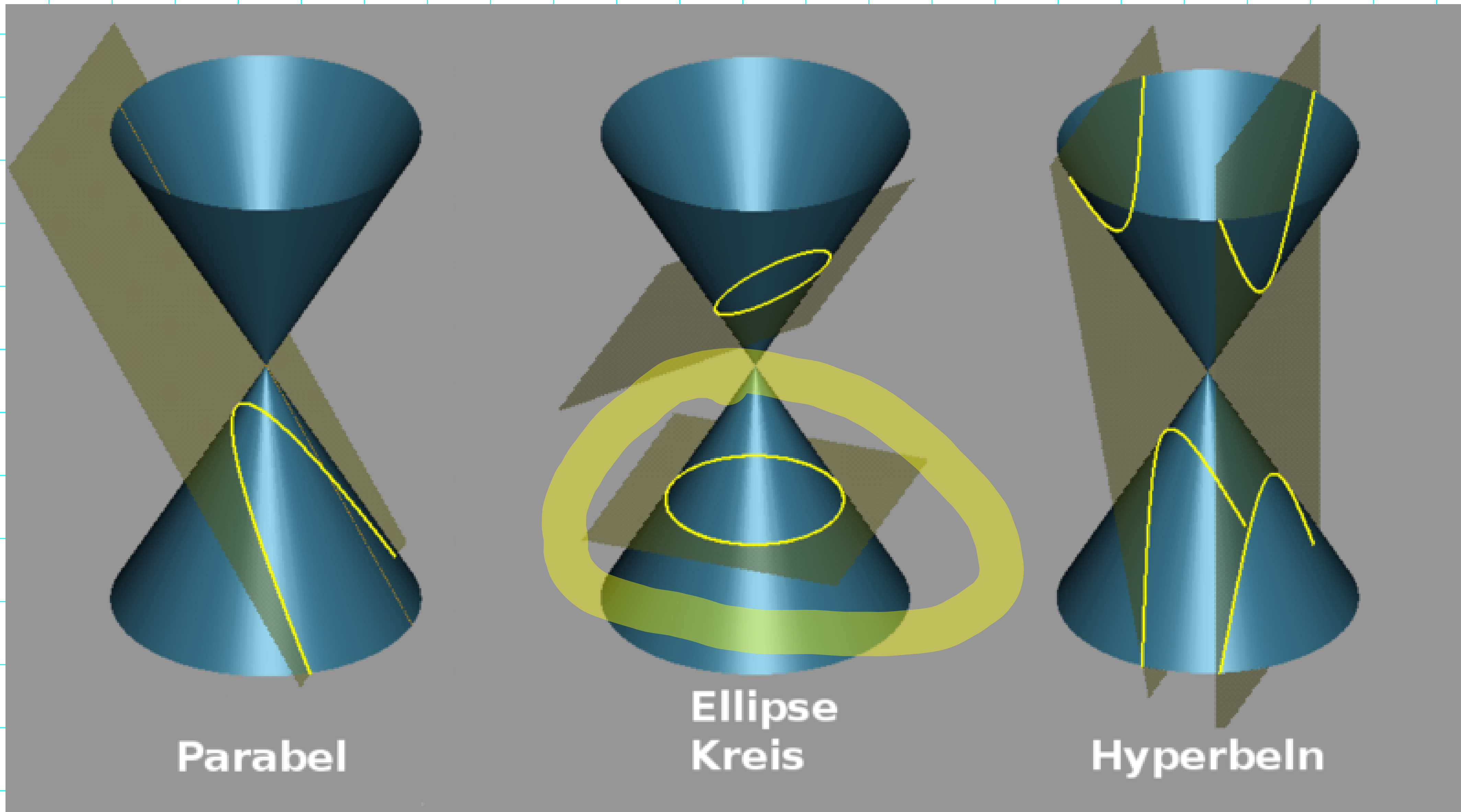
Besteht aus zusammengefügten Strecken

geschlossener Polygonzug: Polygon.



Kegelschnitte

Schnitt zwischen Doppelkegel und Ebene.



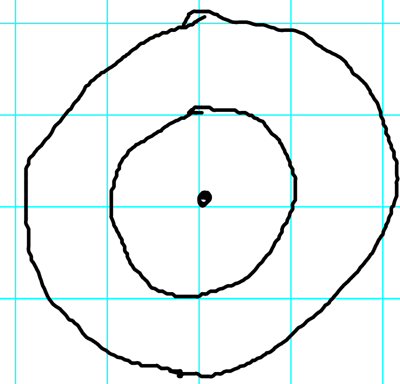
zu steil für Ellipse,
zu wenig steil f. Hyperbel
1 Ast.

Ellipse ... „verzerrter Kreis"

Hyperbel: 2 Äste

Kurven mit spez. Eigenschaften,
werden wir noch anschauen ...

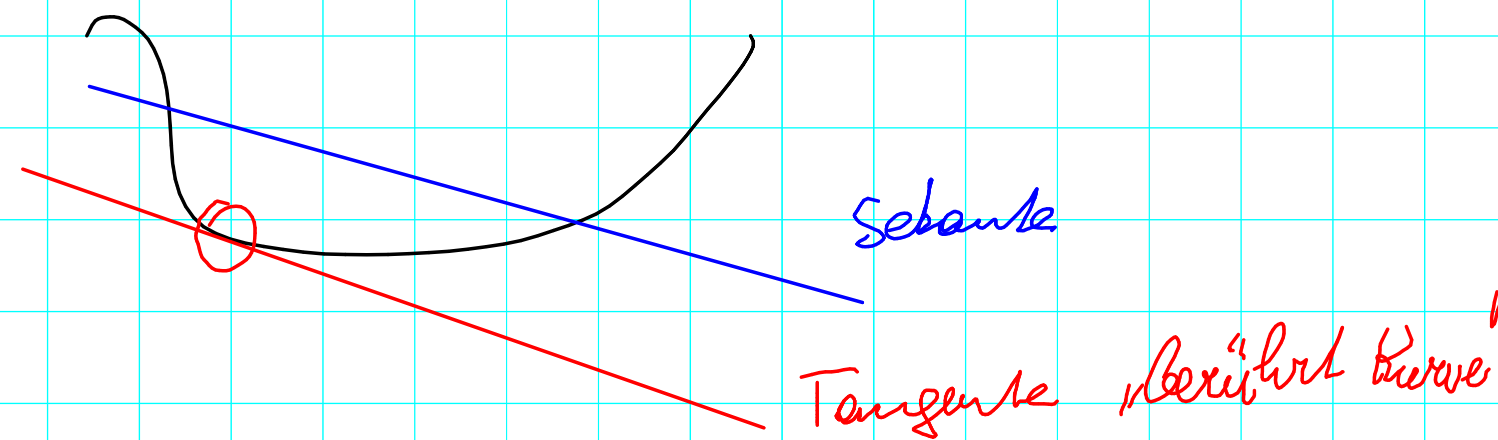
Konzentrische Kreise

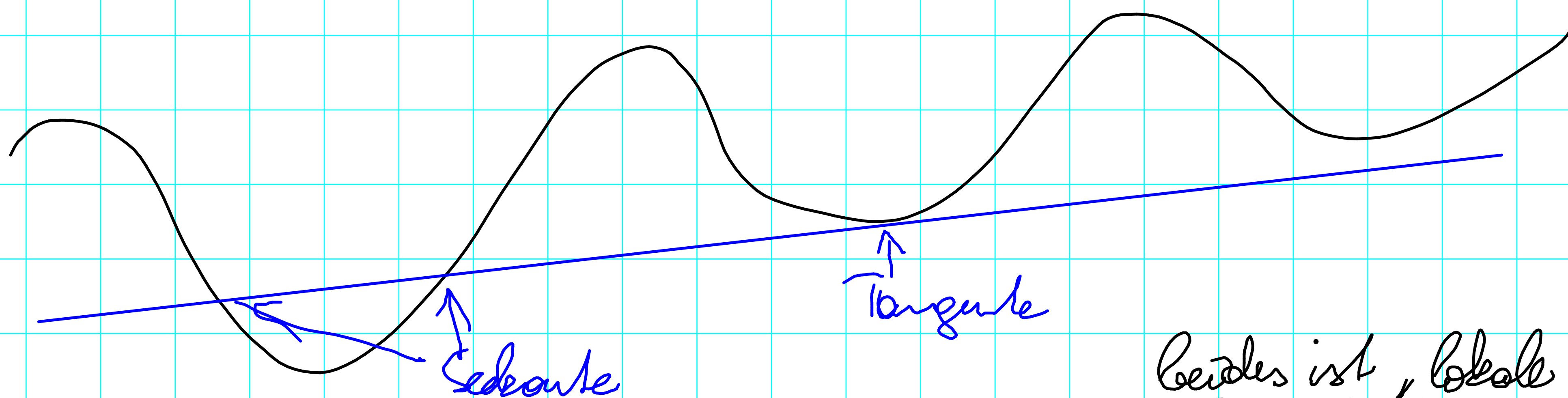


Kreise mit gleichem Mittelpunkt und i.A. versch. Radien heißen konzentrisch.

Sekante einer Kurve

Tangente an eine Kurve.





Beides ist „lokale" Eigenschaft,

Flächen in $\mathbb{R}^3$ zweidimensionale Objekte im Raum

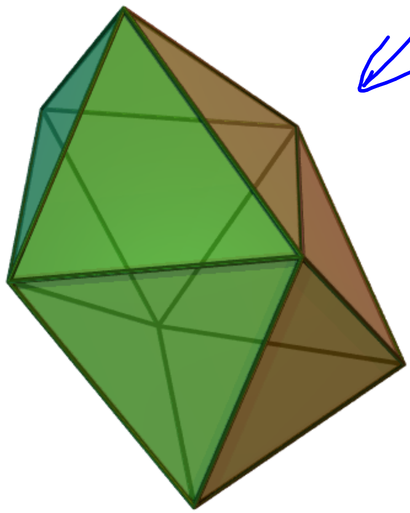
Ebene | gekrümmte Fläche.

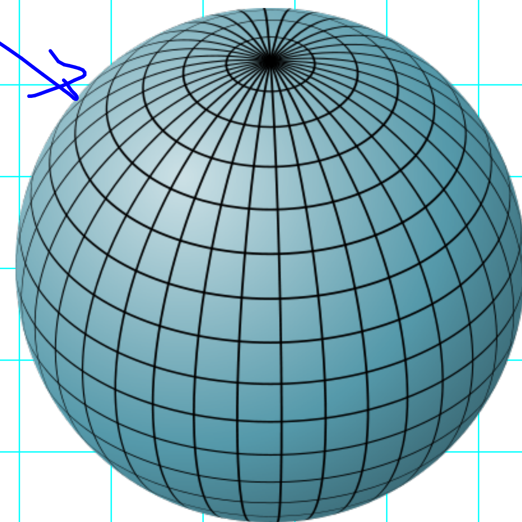
geschlossen vs offen

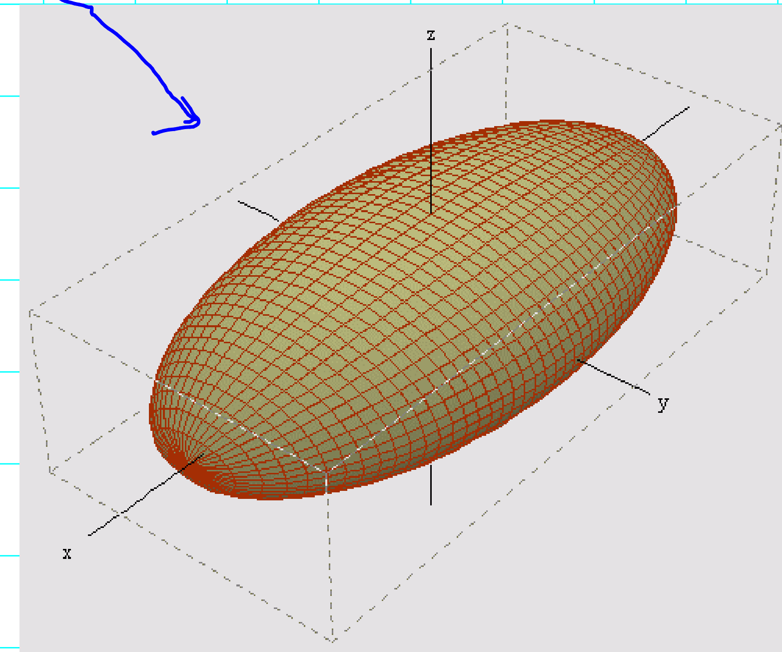
geschlossen

Ellipsoid

Kugel



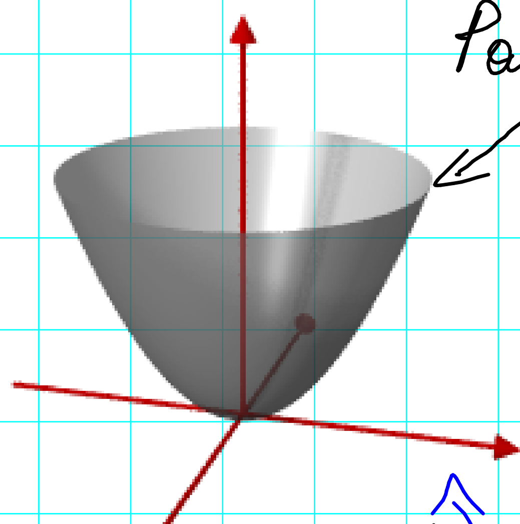


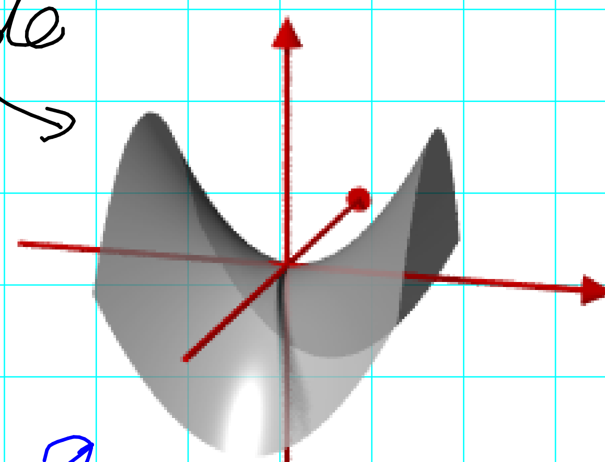


Polyeder

(Randflächen sind eben)

Paraboloide





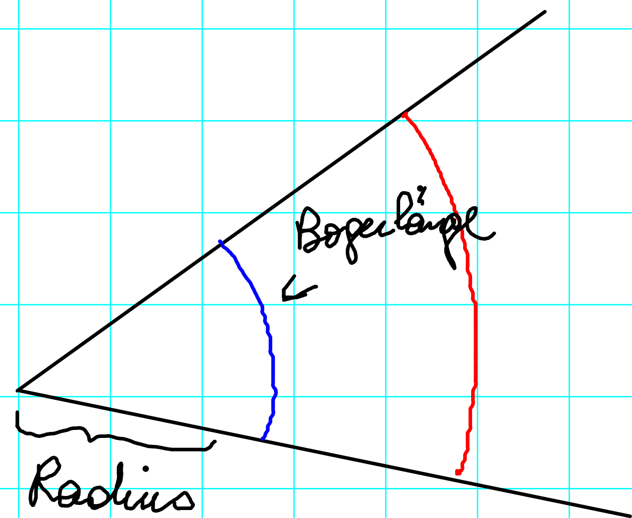
ellipt. Paraboloid

offen

hyperbol. Paraboloid

Ebene Geometrie

Winkel



doppelter Radius $\hat{=}$ dopp. Bogenlänge

Für diese beiden Strahlen ist Verhältnis

$$\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

konstant.

Dieses Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$ nennt man Winkel zwischen den beiden Strahlen.

Somit ist Winkel dimensionslos, also Einheit 1

Kreis mit Radius 1: Bogenlänge 2π.

(definiere π als die Bogenlänge eines Halbkreises mit Radius)

$\pi \approx 3.14159\ldots$

Gesamter Kreis : 2π

Halbkreis : π

Viertelkreis : $\pi/2$

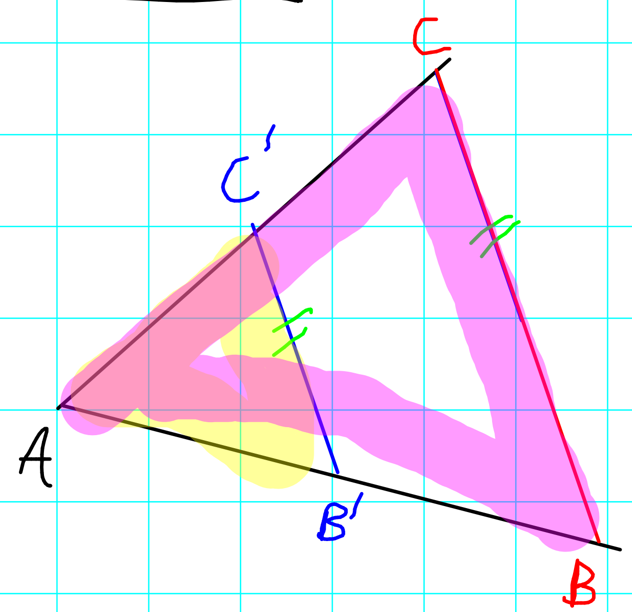
⋮

Zur Unterhaltung / Verwirrung / Vereinfachung gibt es weitere Bezeichnungen:

„Grad“ : Vollkreis $\hat{=}$ 360° $\left(360 = 8 \cdot 5 \cdot 9 = = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \ldots \right)$

„Neugrad“ / „Gon“ Vollkreis $\hat{=}$ 400 Neugrad.

Ähnlichkeit / Strahlensatz



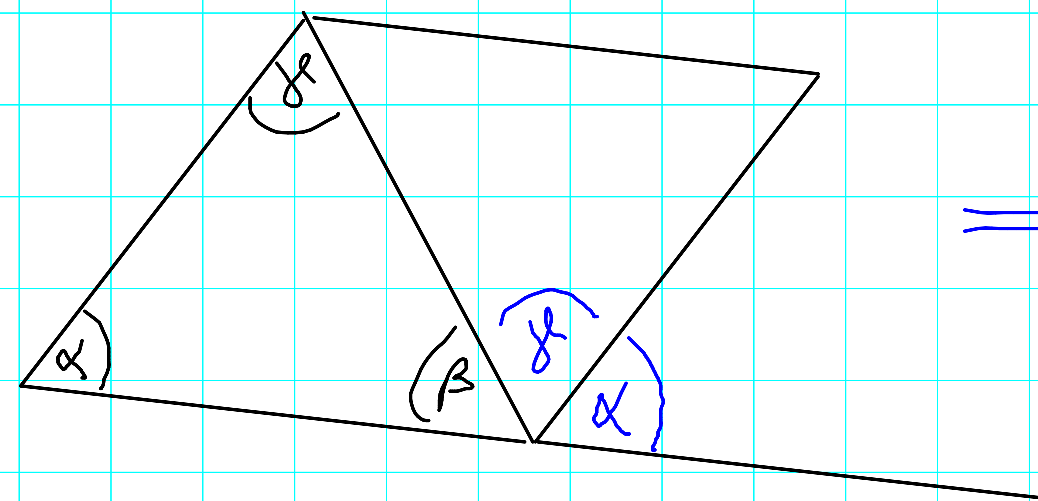
Es gilt (Strahlensatz):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$$

Vergrößern ändert nichts am Seitenverhältnis.

$$\frac{\text{Flächeninhalt}(ABC)}{\text{Flächeninhalt}(AB'C')} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}\right)^2$$

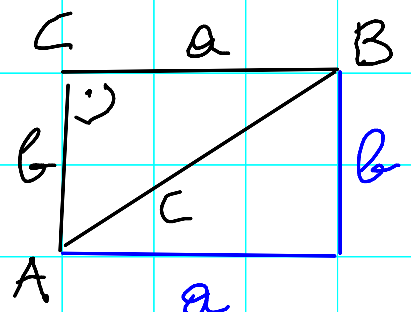
Dreieck.



$$\Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$$
$$= 180^\circ$$

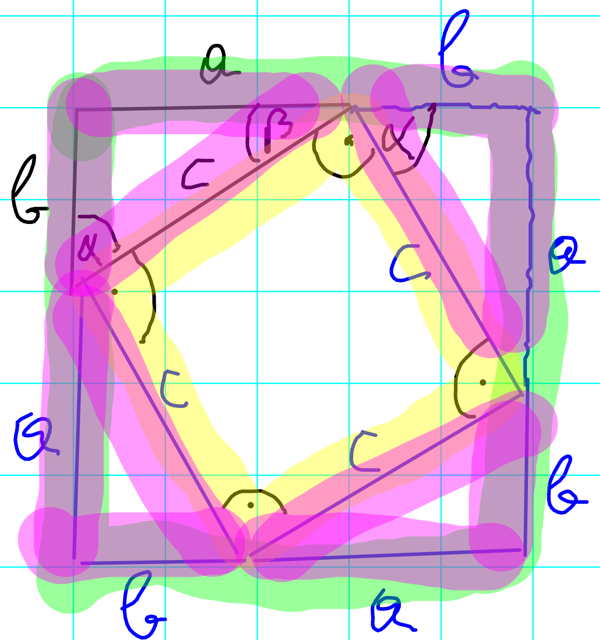
Winkelsumme im Dreieck: 180°.

rechtwinkelige Dreiecke   ein Winkel ist rechter Winkel (≙ Viertelkreis)



$\overline{AB} = c$
$\overline{BC} = a$
$\overline{AC} = b$

Flächeninhalt: $\frac{ab}{2}$
(Hälfte des Rechtecks mit Seitenlängen a und b).



großes Quadrat mit Seitenlänge $a+b$
und Fläche $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

kleines Quadrat mit Seitenlänge c
und Fläche c^2
Fläche der 4 Dreiecke $4\cdot\frac{ab}{2} = 2ab$

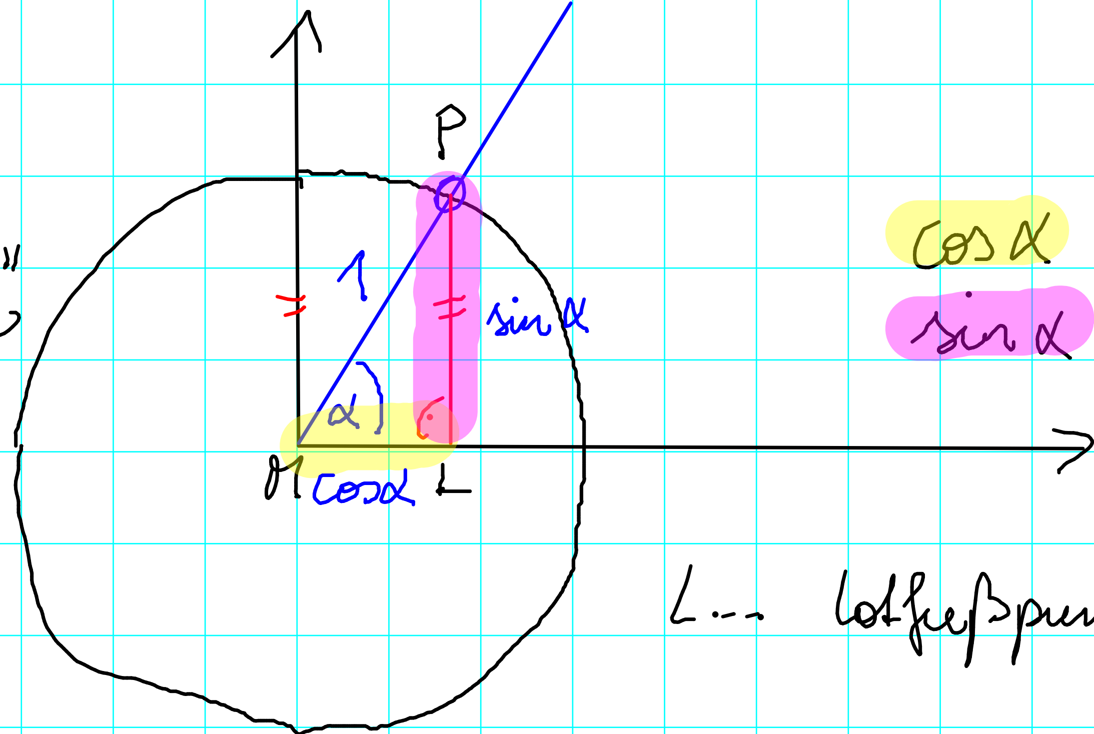
also:

$$a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab \Longrightarrow a^2+b^2=c^2$$

Pythagoras

Trigonometrie,

„Winkelfunktionen"



Kreis mit Radius 1

$\cos\alpha := \overline{ML}$ „Cosinus von α"

$\sin\alpha := \overline{LP}$ „Sinus von α"

L... Lotfußpunkt von P auf x-Achse

6.10.2011

Die Längen sind orientiert zu sehen, d.h. $\cos\alpha < 0$, wenn P links der y-Achse liegt; $\sin\alpha < 0$, wenn P unter der x-Achse liegt.

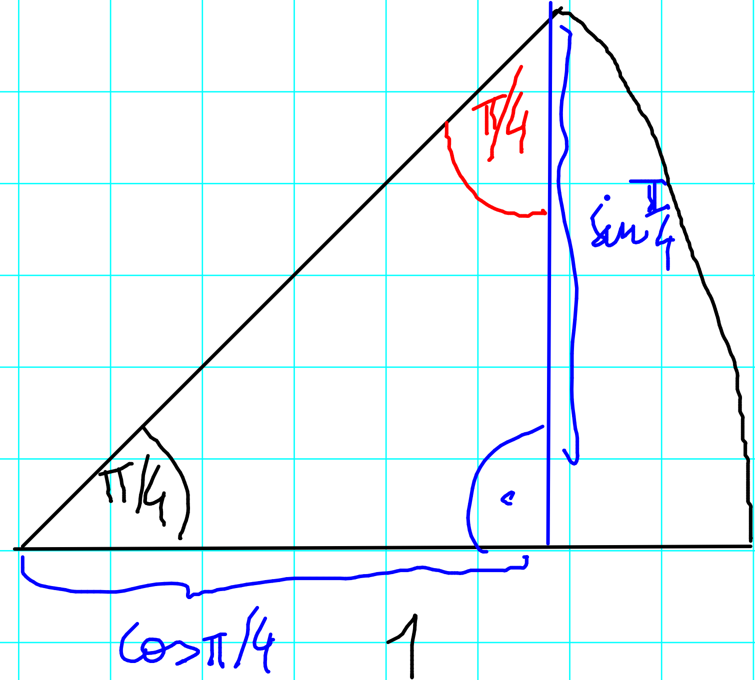
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1^2$$

Pythagoras.

Spezielle Werte:

α	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0
$\sin\alpha$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1

Bei $\pi/4$:



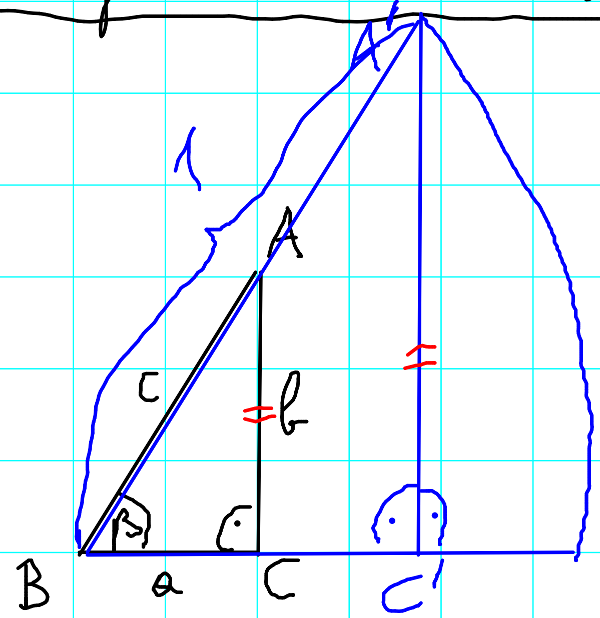
$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$ ✓

somit ist Dreieck gleichschenklig

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} > 0$

$$2\cos^2\frac{\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck



$$\overline{BC'} = \cos\beta$$

$$\overline{A'C'} = \sin\beta$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

$$1 \quad \frac{\sin\beta}{1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}$$

$\sin\beta$

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\Longrightarrow$$

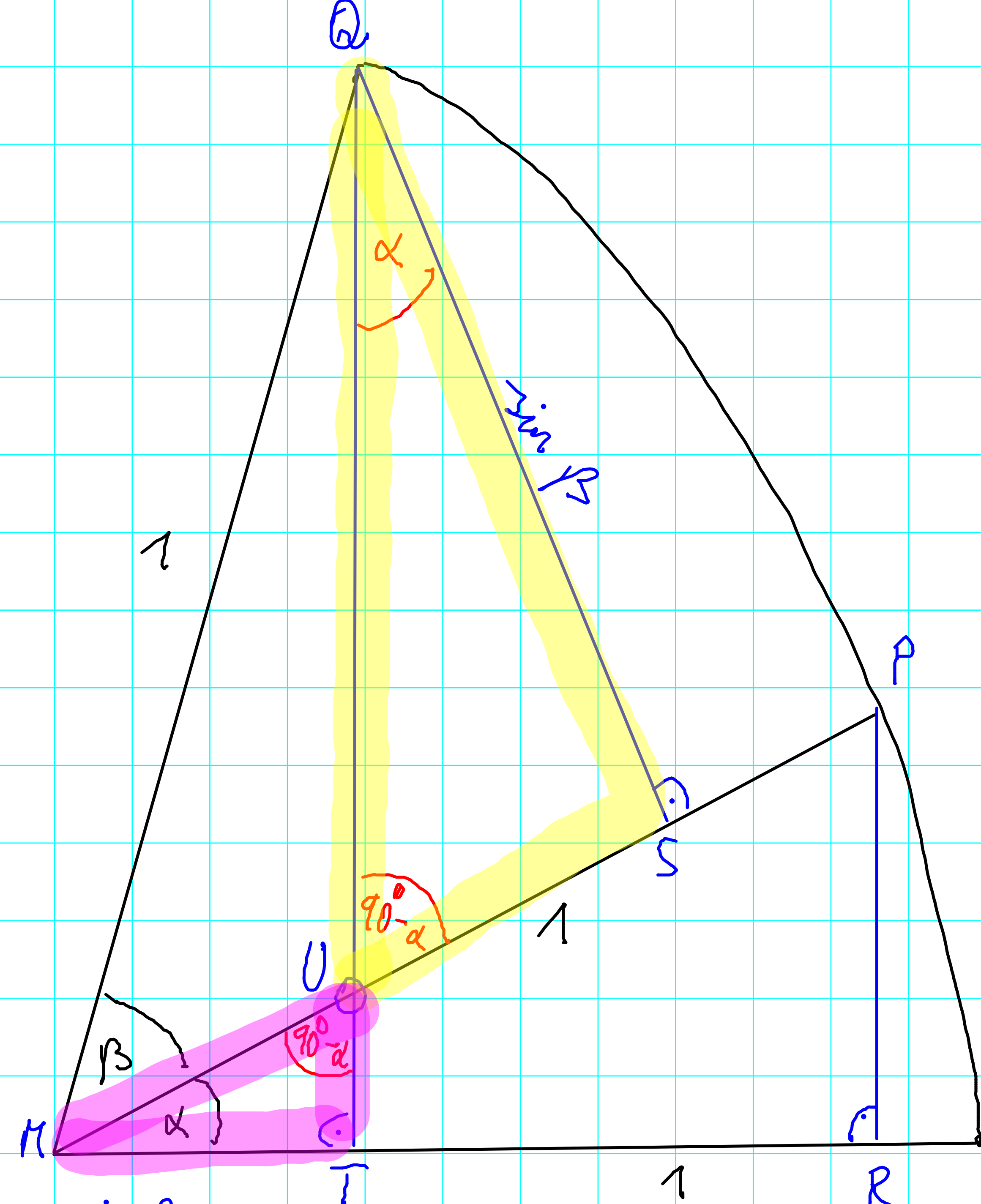
$$\tan\beta := \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{1}{\tan\beta}$$

Additions THEOREME

Für beliebige α, β:

$$\cos(\alpha+\beta) = ?$$

$$\sin(\alpha+\beta) = ?$$



$$\overline{QS} = \sin\beta$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QU}} = \cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{QU} = \frac{\overline{QS}}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\overline{US}}{\overline{QS}} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\overline{US} = \overline{QS}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha}$$

$$\overline{MS} = \cos\beta \qquad \overline{MU} = \cos\beta - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha} \quad \left(= \overline{MS} - \overline{SU}\right)$$

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{MU}} = \cos\alpha \implies \cos(\alpha+\beta) = \overline{MT} = \overline{MU}\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{\overline{UT}}{\overline{MU}} = \sin\alpha \implies \overline{UT} = \overline{MU}\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha - \frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

$$\implies \sin(\alpha+\beta) = \overline{QT} = \overline{QU} + \overline{UT} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\beta - \frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\beta - \sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\beta =$$

$$= \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\Big(\underbrace{1-\sin^2\alpha}_{\cos^2\alpha \text{ (Pythagoras!)}}\Big) + \sin\alpha\cos\beta$$

$$= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta.$$

Also:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

Was passiert bei $\alpha = \beta$

$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

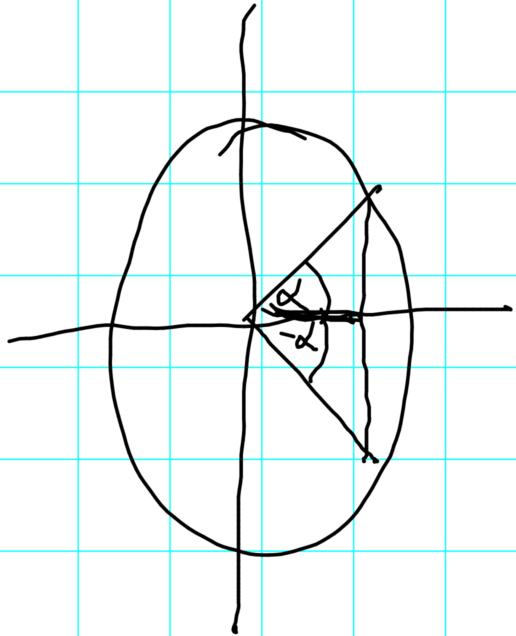
$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

<u>Doppelwinkelformeln</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}}$$

<u>Weitere Konsequenzen aus Additionstheoremen</u>

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

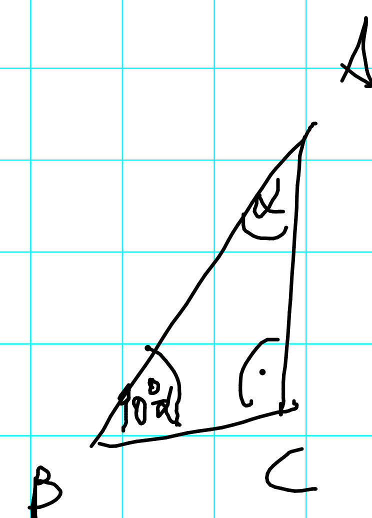
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

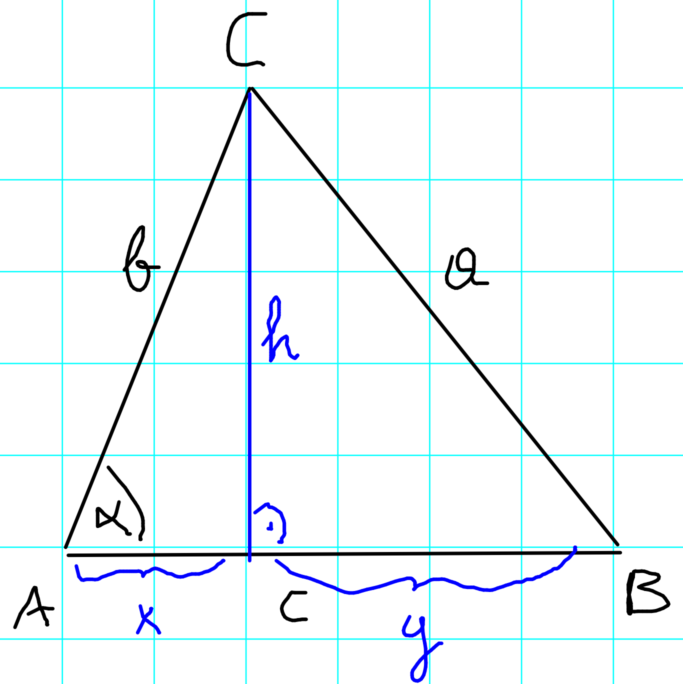
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cos\alpha + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha$$

usw.



Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck



$$\begin{cases} y^2 + h^2 = a^2 \\ x^2 + h^2 = b^2 \end{cases}$$

Pythagoras

$$\frac{x}{b} = \cos\alpha$$

$$x = b\cos\alpha$$

$$y = c - x = c - b\cos\alpha$$

$$a^2 - y^2 = h^2 = b^2 - x^2$$

alles einsetzen:

$$a^2 - (c - b\cos\alpha)^2 = b^2 - (b\cos\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - \left(c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha\right) = b^2 - b^2\cos^2\alpha$$

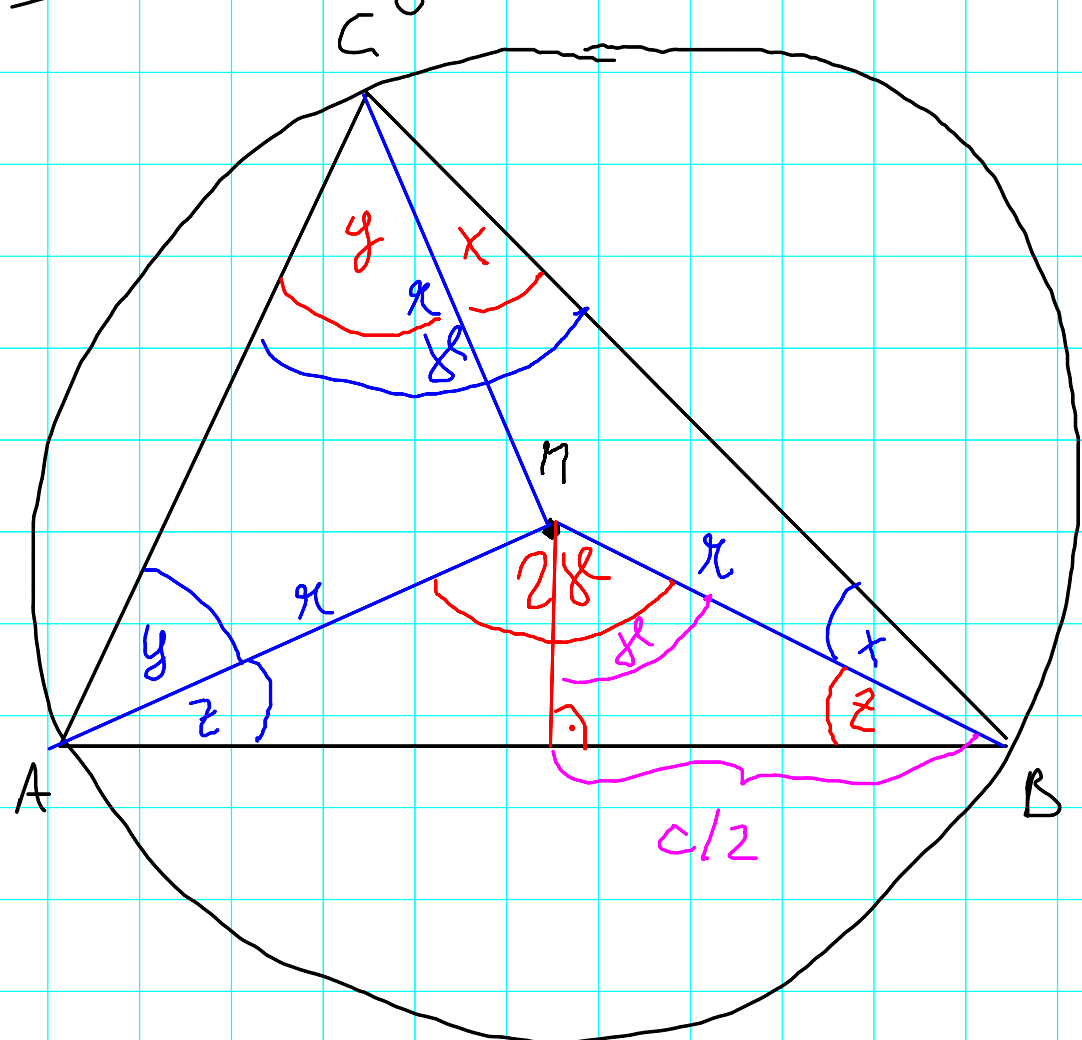
$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha - \cancel{b^2\cos^2\alpha} = b^2 - \cancel{b^2\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \quad \text{Cosinussatz.}$$

Was passiert, wenn $\alpha = 90°$?

$$a^2 = b^2 + c^2 - 0 \quad \text{Pythagoras revisited.}$$

Auf dem Weg zum Sinussatz



Dreieck ABC mit seinem Umkreis (Mittelpunkt M, Radius r).

$$x + y + z = 90° \quad \text{(Hälfte Winkelsumme im Dreieck ABC)}$$

$$\sphericalangle BMA = 180° - 2z = 2x + 2y + 2z - 2z =$$
$$= 2x + 2y = 2\gamma$$

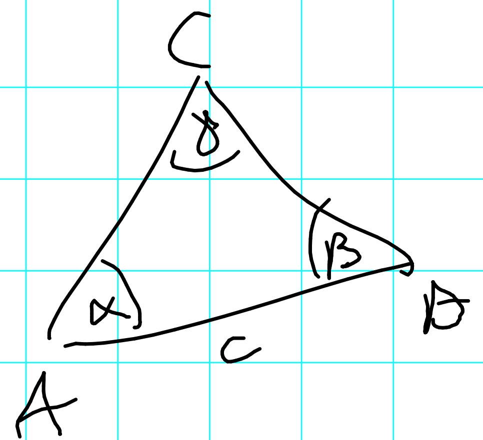
$$\sin\gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \qquad \text{Analog:} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2r \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2r$$

Sinussatz im allg. Dreieck

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \qquad r \ldots \text{Umkreisradius}}$$

Bsp.



$$\left.\begin{aligned} c &= 10 \\ \alpha &= 20^\circ \\ \beta &= 30^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = 130^\circ$$

Umfang = ?

Sinussatz: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = 10\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 130^\circ}$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} = 10\,\frac{\sin 30^\circ}{\sin 130^\circ}$$

$$u = a + b + c = c\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + 1\right) = 10\left(\frac{\sin 20^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} + 1\right) \approx 21$$

$\square$