1. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots\},$$
$$M_2 = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \ldots\}.$$

   (a) Drücken Sie M_1 und M_2 durch Angabe einer Eigenschaft formal aus.
   (b) Geben Sie $M_1 \cap M_2$ an.
   (c) Geben Sie $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ an.
   (d) Wieviele voneinander verschiedene echte Teilmengen besitzt $(M_1 \cap [0, 10]) \cup \{0\}$?

2. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = [-6, 3),$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist im Betrag größer als 1 und kleiner als } 8\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}.$$

   (a) Stellen Sie den Durchschnitt dieser Mengen formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.
   (b) Stellen Sie $(\mathbb{R} \setminus M_2) \cup (\mathbb{R} \setminus M_1)$ formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.

3. Bei der Befragung einer Gruppe von SportlerInnen ergab sich folgendes Bild:

   - 1 SportlerIn übte alle erfassten Sportarten aus,
   - 7 SportlerInnen gaben an, zumindest Schwimmen und Laufen zu betreiben,
   - 1 SportlerIn betrieb mindestens Schwimmen und Radfahren,
   - 11 SportlerInnen übten Laufen als Sport aus,
   - die Anzahl jener, deren einziger Sport Schwimmen ist, ist doppelt so groß wie die Anzahl derer, die Laufen als alleinigen Sport ausgewählt haben,
   - die Anzahl der Befragten, die keine der von der Umfrage erfassten Sportarten ausübten, addiert zu der Anzahl jener, die Laufen als alleinigen Sport betreiben, ergibt 4,
   - die Anzahl der SportlerInnen, die nur Rad fahren, ist doppelt so groß wie die Anzahl jener, deren Sportarten nicht von der Umfrage erfasst werden.
   - nimmt man die Anzahl der SchwimmerInnen und addiert 10, so erhält man die Gesamtanzahl der befragten SportlerInnen.

   (a) Wieviele SportlerInnen wurden befragt?
   (b) Am Donnerstag werden alle RadfahrerInnen nochmals befragt. Wieviele Fragebögen müssen gedruckt werden?

4. Ein Aktienpaket, das ursprünglich um 300.000 Euro gekauft wurde, erfährt zunächst einen Wertzuwachs von 6 Prozent und dann einen Wertverlust von 3 Prozent. Wieviel bleibt übrig, nachdem beim Verkauf 25 Prozent vom Gewinn als Aktiensteuer abgeführt werden? Um wieviel Prozent hat sich das in das Aktienpaket investierte Geld schlussendlich vermehrt?

5. Zeigen Sie die folgenden Identität mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

6. Ein Ballon bewegt sich in 400 Metern Höhe auf geradlinigem Kurs. Zu Beginn wird er vom Boden aus von einem Beobachter in 500 Metern Entfernung gesehen. Eine halbe Stunde später – der Beobachter hat sich inzwischen um 15° gedreht – sieht er den Ballon in größerer Entfernung unter einem Höhenwinkel von 3°. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Ballon?

7. Von vier Punkten A, B, C, D in der Ebene ist folgendes bekannt:
   - D liegt auf der Verlängerung der Strecke durch C und B über B hinaus,
   - die Strecke $\overline{AC}$ misst 500 Meter,
   - die Strecke $\overline{AB}$ misst 450 Meter,
   - $\measuredangle BCA = 60°$,
   - $\measuredangle BAD = 30°$.

   Gesucht ist die Entfernung zwischen C und D.

8. Von 24 Mitgliedern eines Sportvereins dürfen nur 12 an den Landesmeisterschaften teilnehmen, der Rest feuert die eigene Mannschaft an. Wieviele verschiedene Einteilungen gibt es?

9. Bei einer Party sind 24 Personen anwesend.
   (a) Zu Beginn wird paarweise (Jeder mit Jedem einmal) mit Sekt angestoßen. Wie oft erklingt das Glas?
   (b) Eine Person nimmt ihren Mantel mit auf das Sofa, die restlichen Mäntel werden in einer Reihe nebeneinander auf die Garderobe gehängt. Wieviele verschiedene Garderobenordnungen (Anordnungen der Mäntel auf der Garderobe) sind denkbar?
   (c) Es ist bekannt, dass alle Anwesenden entweder in Österreich, Deutschland, der Schweiz, Ungarn oder Italien geboren wurden. Wieviele Möglichkeiten bestehen, wenn die Herkunft aller Personen geraten wird? Hier soll nicht nur beachtet werden, wieviele Personen aus den einzelnen Ländern kommen, sondern auch, um welche Personen es sich handelt.
   (d) Am Ende der Party gibt es Arbeitsdienste zu verrichten: 5 Personen sollen den Boden reinigen, 2 das Geschirr spülen, 4 Leute den Müll entsorgen. Die restlichen Partygänger haben sich unauffällig davongeschlichen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 24 Personen diesen Jobs zuzuordnen?

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

    (a) $\dfrac{x^2 + x + 6}{x - 2} = x - 1$

    (b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1$

    (c) $\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x = 0$

    (d) $2 \sin \dfrac{x}{2} = \tan x$

11. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

(a) $2x^4 + 6x^3 = 24x^2 + 26x + 30,$

(b) $x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 4x - 1 = 0,$

(c) $\Big| -|x+5| + 1 \Big| - |x+4| = 0.$

12. Gegeben sei

$$z = \frac{(6-i)(3+5i)}{1+i}.$$

(a) Berechnen und vereinfachen Sie z und z^2.

(b) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag von z an und stellen Sie z in der komplexen Zahlenebene dar.

(c) Geben Sie ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten an, das z als Nullstelle besitzt.

13. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die

$$z^3 = 125$$

erfüllen.

14. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $|x+4| + 3|x-1| < |x+7|$,

(b) $x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 10x > -3$,

(c) $\dfrac{x^2-11}{x+6} < |3x+5|$.

15. Man faktorisiere $x^{10} - y^{10}$ soweit wie möglich.

16. Finden Sie alle komplexen Zahlen z, die die folgende Gleichung erfüllen. Geben Sie zusätzlich Real- und Imaginärteil der Lösungen an.

$$\frac{z^2 + (-1+4i)z + 42 - 5i}{z^2 - (3+4i)z - 3i} = 1$$

17. Gegeben sind die Funktionen f, g, und h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wobei

    (a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 16x + 16}$,

    (b) $g(x) = 2\sin(x-3)$,

    (c) $h(x) = 2 + x^5$.

    Stellen Sie (ohne Verwendung der Differentialrechnung) für f, g, und h jeweils fest, ob die Funktion

    - injektiv, surjektiv, bijektiv,
    - beschränkt, nach oben beschränkt, nach unten beschränkt,
    - (streng) monoton wachsend oder fallend,
    - gerade oder ungerade,
    - periodisch ist.
    - Bilden Sie die Umkehrabbildung der Funktion, falls möglich.

18. Sei
$$f : D \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3 - 6\,x^2 + 9\,x - 4}{x^3 - 2\,x^2 - 7\,x - 4}.$$
    (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D
    (b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
    (c) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$.
    (d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$.
    (e) An welchen Punkten ist f stetig? Wo ist f stetig ergänzbar?

19. Welche der folgenden Grenzwerte reeller Funktionen existieren? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.
    (a) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^5 - 42x^4}$, $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^5 - 42x^4}$, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^5 - 42x^4}$
    (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$.

20. Seien $A = (16, 9, 1)$ und $B = (21, 14, 26)$. Der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis $2 : 3$. Berechnen Sie die Koordinaten von C.

21. Sei h die durch
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
gegebene Gerade. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Gerade g durch $A = (0, 10, a)$ und $B = (-2, 14, 16)$ einen Schnittpunkt mit der Geraden g besitzt. Man bestimme diesen.

22. Man bestimme den Schnitt der beiden Ebenen
$$\varepsilon_1 : \vec{x} \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$\varepsilon_2 : \vec{x} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

23. Bestimmen Sie den Inkreismittelpunkt und den Inkreisradius des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (21, 71)$, $B = (21, -29)$, $C = (0, -1)$.

24. Das Kohlenstoffisotop C^{14} ist radioaktiv und zerfällt nach dem Gesetz $f(t) = f(0) \cdot e^{-\lambda t}$, wobei t die Zeit in Jahren ist. Man weiß, dass nach 5760 Jahren nur mehr die Hälfte der Ausgangssubstanz vorhanden ist (Halbwertszeit). Wie groß ist λ? Nach wie vielen Jahren hat sich die Ausgangssubstanz um 10 % verringert?

25. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

    (a) $e^{8x} + 4e^{3x} - 12e^{-2x} = 0$

    (b) $(\ln(x))^2 + \ln(x) - 2\ln(e^6) = 0$

26. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

    (a) $\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{3}\log_2(64e^{-3})$

    (b) $\frac{\sqrt[x]{e^{(x+2)^2-4}}}{e^{x+5}}$

    (c) $\ln(\sqrt{x^{3e}}) - \ln(x^{\frac{e}{3}})$

27. Zeigen Sie, dass für x, $y \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \, \tanh y}$$

gilt.

28. Stellen Sie arcoth durch den natürlichen Logarithmus dar. (Die Umkehrfunktion von coth heißt arcoth, wobei $\coth x = \cosh(x)/\sinh(x)$)

29. (a) Man bestimme den Abstand des Punktes $A = (26, 0, -13)$ von der Ebene $2x - y - 2z = -30$.

 (b) Man bestimme den Abstand des Punktes $B = (12, 22, 16)$ von der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

30. Berechnen Sie folgende Wurzel und stellen Sie alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene dar:
$$\sqrt[5]{-243}$$

31. Differenzieren Sie folgende Funktionen:
    (a) $f(x) = (3x^2 + \frac{5}{x})^{\frac{1}{4}}$
    (b) $f(x) = \sqrt[5]{\sin(2x-1) + 3x^2}$
    (c) $f(x) = \frac{\sqrt{4x-1}}{3x}$
    (d) $f(x) = (x+1)\ln(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x})$
    (e) $f(x) = \exp(\sinh(2x) + \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2x^2}))$
    (f) $f(x) = (2^x)^4$

32. Bestimmen Sie die Halbachsenlängen und den Abstand der Brennpunkte der Ellipse
$$3x^2 + 27y^2 - 27 = 0.$$
Schneiden Sie dann die Ellipse mit der Geraden $g : y = \frac{1}{2}x - 1$.

33. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, wobei
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

34. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \tanh x}{x - \sinh x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{e^{0.4x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{1}{\ln(3x)} - \dfrac{1}{\ln(-1+9x-9x^2)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{\tan x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{1-e^x}{x}} + 3^{-\frac{1-e^{-x}}{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} x \coth x$

35. Entwickeln Sie die Funktion
$$f(x) = \arctan \frac{2x+1}{x+3}$$
um $x_0 = -2$ in eine Taylorreihe bis zu den Gliedern zweiter Ordnung (d.h. bestimmen Sie die ersten drei Glieder dieser Reihe).

36. Führen Sie auf rechnerischem Wege eine Kurvendiskussion der folgenden beiden Funktionen durch (gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Nullstellen, lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereichs, Stetigkeit) und fertigen Sie eine Skizze an.

$$(a) \quad f(x) = \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$
$$(b) \quad f(x) = \sqrt{9-4x^2}$$

37. Berechnen Sie die Tangentialebene der Fläche $f(x,y) = 15x^3 + 13y^4$ im Punkt $(1,1)$ und bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs.

38. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2}{6} - 3xy + \frac{y^3}{6}.$$

39. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz + y^2 \\ xy^2 + \sinh x \end{pmatrix}.$$

40. Bestimmen Sie folgende Integrale nur mit aus der Vorlesung bekannten Mitteln:

    a) $\int x + \ln \sqrt[5]{x}\, dx$

    b) $\int_0^3 x^2 + 2^{x+3}\, dx$

    c) $\int_0^2 \frac{x^2+4x+4}{x+2}\, dx$

41. Bestimmen Sie jeweils die Fläche zwischen den beiden Funktionen bzw. Kurven:

    a) $f(x) = -x^3 + 2x$ und $g(x) = x$

    b) $y^2 = 2x$ und $y^2 = x/2 + 4$

42. Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$f(x) = \cosh(x)$$

zwischen $x_0 = 0$ und $x_1 = \ln(4 + \sqrt{17})$.

43. Berechnen Sie

$$\iint_B x^2 y\, dx\, dy,$$

wobei B von den Geraden $4x = -1 + y$, $x = 4y - 4$ und von der Hyperbel $xy = 3$ begrenzt wird und ganz überhalb der x-Achse liegt.