

1. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots\},$$

$$M_2 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}.$$

- (a) Drücken Sie M_1 und M_2 durch Angabe einer Eigenschaft formal aus.
(b) Geben Sie $M_1 \cap M_2$ an.
(c) Geben Sie $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ an.
(d) Wieviele voneinander verschiedene echte Teilmengen besitzt $M_1 \cap [0, 9]$?

2. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = (-5, 4],$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist im Betrag größer als } 2 \text{ und kleiner als } 6\},$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}.$$

- (a) Stellen Sie den Durchschnitt dieser Mengen formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.
(b) Stellen Sie $(\mathbb{R} \setminus M_1) \cup (\mathbb{R} \setminus M_2)$ formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.

3. Bei der Befragung einer Gruppe von Kindern stellte ein Kinobetreiber folgendes fest:

- 2 Kindern gefielen alle gezeigten Filme,
- 6 Kinder gaben an, dass ihnen zumindest Pinocchio und Schneewittchen gefallen,
- 2 Kindern gefiel zumindest Pinocchio und Fantasia,
- 10 Kinder fanden Schneewittchen gut,
- die Anzahl der Kinder, denen nur Pinocchio gefällt, ist doppelt so groß wie die Anzahl jener Kinder, denen nur Schneewittchen gefällt.
- die Anzahl der Kinder, denen nur Fantasia gefällt, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kinder, denen sowohl Schneewittchen als auch Fantasia, nicht aber Pinocchio gefällt,
- addiert man zur Anzahl der Kinder, die sich bei allen Filmen langweilten, die Anzahl der Kinder, die nur Schneewittchen mochten, so erhält man 4 als Ergebnis.
- nimmt man die Anzahl der Kinder, die Fantasia mögen, mal 2 und addiert 4, so erhält man die Gesamtanzahl der befragten Kinder.

- (a) Wieviele Kinder wurden befragt?
(b) Am Mittwoch wird den interessierten Kindern Pinocchio nochmals gezeigt. Wieviele Plätze müssen dafür reserviert werden?

4. Der Preis einer Stereoanlage wird von 300 Euro (inklusive 20 Prozent MWSt.) zunächst um 10 Prozent erhöht und dann im Rahmen einer Aktion um 10 Prozent gesenkt. Wie viel kostet die Stereoanlage nach Abzug der MWSt.? Um wieviel Prozent hat sich der Preis durch die beiden Aktionen insgesamt verändert?

5. Zeigen Sie die folgenden Identität mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$$

6. Von einem Berg aus wird ein Bus auf einer geraden Straße beobachtet. Zu Beginn befindet sich der Bus in einer Entfernung von 2 Kilometern unter einem Tiefenwinkel von 75° . Drei Minuten später – der Beobachter hat sich inzwischen um 15° gedreht – sieht er den Bus unter einem Winkel von nur mehr 35° . Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Bus?

7. Von vier Punkten A, B, C, D in der Ebene ist folgendes bekannt:

- D liegt auf der Verlängerung der Strecke durch C und B über B hinaus,
- die Strecke \overline{BC} misst 300 Meter,
- die Strecke \overline{AC} misst 500 Meter,
- $\angle BCA = 60^\circ$,
- $\angle BAD = 30^\circ$.

Gesucht ist die Entfernung zwischen B und D .

8. Paul darf sich 15 von 30 Tagen im November aussuchen, an denen er sein neues PC-Spiel spielen darf, die restlichen Tage muss er Mathematik lernen. Zwischen wie vielen Möglichkeiten kann er wählen?

9. Bei einer Party sind 23 Personen anwesend.

- (a) Zu Beginn wird paarweise (Jeder mit Jedem einmal) mit Sekt angestoßen. Wie oft erklingt das Glas?
- (b) Für ein Spiel wird ein Spielleiter bestimmt, die restlichen Anwesenden setzen sich in einer Reihe nebeneinander. Wieviele verschiedene Sitzordnungen sind bei dem Spiel denkbar?
- (c) Nachdem alle Handynummern getauscht wurden, steht fest, dass alle Anwesenden als Provider entweder A1, T-Mobile, Orange, bob, yess, oder Drei benutzen (jeder besitzt genau ein Handy und alle lehnen portierte Rufnummern ab). Wieviele Möglichkeiten bestehen, wenn die Zuordnung der Gäste zu den Providern geraten wird? Nicht nur die Anzahl der Gäste, die die einzelnen Provider benutzen, soll eine Zuordnung charakterisieren, sondern auch, um welche Personen es sich handelt.
- (d) Von der Festgesellschaft schlagen 6 Leute ihr Zelt im Garten auf, 7 Personen verbringen die Nacht im Haus und der Rest geht nach Hause. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 23 Personen diesen drei Gruppen zuzuordnen?

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

(a) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4} = x + 1$

(b) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = x - 2$

(c) $\sqrt{9x^2 - x - 6} - 3x = 0$

(d) $\cos x - \frac{\tan 2x}{2} = 0$

11. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

(a) $3x^4 + 12x^3 = 18x^2 + 21x + 30$,

(b) $x^5 - 3x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$,

(c) $\left| -|x + 4| + 1 \right| - |x + 3| = 0$.

12. Gegeben sei

$$z = \frac{(2 - i)(5 + 7i)}{1 + i}.$$

- (a) Berechnen und vereinfachen Sie z und z^2 .
- (b) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag von z an und stellen Sie z in der komplexen Zahlenebene dar.
- (c) Geben Sie ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten an, das z als Nullstelle besitzt.

13. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z , die

$$z^3 = -64$$

erfüllen.

14. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $|x - 2| + 2|x + 3| < |x - 8|$,

(b) $x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x > -2$,

(c) $\frac{x^2 - 12}{x + 7} < |x + 4|$.

15. Man faktorisieren $x^{10} - y^{10}$ soweit wie möglich.

16. Finden Sie alle komplexen Zahlen z , die die folgende Gleichung erfüllen. Geben Sie zusätzlich Real- und Imaginärteil der Lösungen an.

$$\frac{z^2 + (2 + 3i)z + 32 + 7i}{z^2 - (2 - 9i)z + 3i} = 1$$

17. Gegeben sind die Funktionen f, g , und h von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , wobei

(a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$,

(b) $g(x) = -\cos(x + 3) - 1$,

(c) $h(x) = -5 + x^5$.

Stellen Sie (ohne Verwendung der Differentialrechnung) für f, g , und h jeweils fest, ob die Funktion

- injektiv, surjektiv, bijektiv,
- beschränkt, nach oben beschränkt, nach unten beschränkt,
- (streng) monoton wachsend oder fallend,
- gerade oder ungerade,
- periodisch ist.
- Bilden Sie die Umkehrabbildung der Funktion, falls möglich.

18. Sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3 - 10x^2 + 33x - 36}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}.$$

- (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D
- (b) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (d) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$.
- (e) An welchen Punkten ist f stetig? Wo ist f stetig ergänzbar?

19. Welche der folgenden Grenzwerte reeller Funktionen existieren? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^4 - 42x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^4 - 42x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^4 - 42x^3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}$.

20. Seien $A = (15, 11, -4)$ und $B = (20, 11, 21)$. Der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis $3 : 2$. Berechnen Sie die Koordinaten von C .

21. Sei g die Gerade durch die Punkte $A = (2, 10, 4)$ und $B = (4, 14, 10)$. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

Gerade h mit g einen Schnittpunkt besitzt. Bestimmen Sie diesen.

22. Man bestimme den Schnitt der beiden Ebenen

$$\varepsilon_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$\varepsilon_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

23. Bestimmen Sie den Inkreismittelpunkt und den Inkreisradius des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (10, 21)$, $B = (14, -7)$, $C = (7, 0)$.
24. Aus einer Bakterienkolonie von 1000 Bakterien sind nach vier Stunden 1500 Bakterien geworden. Es ist bekannt, dass sich Bakterien nach dem Gesetz $f(t) = f(0) \cdot e^{\lambda t}$ vermehren, wobei t die Zeit in Stunden ist. Wie viele Bakterien sind nach sieben Stunden vorhanden?
25. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:
- (a) $e^{3x} + e^{-x} - 12e^{-5x} = 0$
 - (b) $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) - 2\ln(e^5) = 0$
26. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
- (a) $\frac{1}{3} \log_3(3e^{-3}) + \frac{1}{\ln(3)}$
 - (b) $\frac{\sqrt[3]{e^{(x-4)^2-16}}}{e^{x-1}}$
 - (c) $\ln(x^{\frac{2e}{3}}) + \ln(\sqrt[3]{x^{-4e}})$

27. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

gilt.

28. Stellen Sie arcosh durch den natürlichen Logarithmus dar.

29. (a) Man bestimme den Abstand des Punktes $A = (26, 0, 35)$ von der Ebene $2x - y + 2z = 14$.

(b) Man bestimme den Abstand des Punktes $B = (12, 22, 6)$ von der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

30. Berechnen Sie folgende Wurzel und stellen Sie alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene dar:

$$\sqrt[5]{-3125}$$

31. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

(a) $f(x) = (2x^2 + \frac{2}{x^2})^{\frac{1}{3}}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x+3) - 4x^2}$

(c) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x-1}}$

(d) $f(x) = (2x-1) \ln(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x})$

(e) $f(x) = \exp(\cosh(2x^3) + \operatorname{arsinh}(\frac{1}{3x}))$

(f) $f(x) = (3^x)^2$

32. Bestimmen Sie die Halbachsenlängen und den Abstand der Brennpunkte der Ellipse

$$18x^2 + 32y^2 - 288 = 0.$$

Schneiden Sie dann die Ellipse mit der Geraden $g: y = \frac{1}{2}x - 1$.

33. Untersuchen Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, wobei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

34. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^{0.3x}} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(2x+2)} - \frac{1}{\ln(1-2x-4x^2)} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 0} 4^{-\frac{2x}{1-e^{-x}}} + 4^{\frac{2x}{1-e^{-x}}} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x \end{array}$$

35. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \operatorname{arccot} \frac{3-x}{4-3x}$$

um $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe bis zu den Gliedern zweiter Ordnung (d.h. bestimmen Sie die ersten drei Glieder dieser Reihe).

36. Führen Sie auf rechnerischem Wege eine Kurvendiskussion der folgenden beiden Funktionen durch (gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Nullstellen, lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereichs, Stetigkeit) und fertigen Sie eine Skizze an.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} f(x) = -\frac{\ln(-x)}{2x} \\ \text{(b)} f(x) = \sqrt{4-x^2} - 1 \end{array}$$

37. Berechnen Sie die Tangentialebene der Fläche $f(x, y) = 2x^2 + 11y^4$ im Punkt $(-1, 1)$ und bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs.
38. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x, y) = \frac{2x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{4}.$$

39. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2y + xy \\ xyz + \cos y \end{pmatrix}.$$

40. Bestimmen Sie folgende Integrale nur mit aus der Vorlesung bekannten Mitteln:

a) $\int 1 + \ln \sqrt[3]{x} \, dx$

b) $\int_0^1 x^4 + 4^{x+2} \, dx$

c) $\int_1^2 \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} \, dx$

41. Bestimmen Sie jeweils die Fläche zwischen den beiden Funktionen bzw. Kurven:

a) $f(x) = x^3 - x + 1$ und $g(x) = x + 1$

b) $y^2 = 3x - 1$ und $y^2 = \frac{x}{2} + 10$

42. Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$f(x) = \cosh(x)$$

zwischen $x_0 = 0$ und $x_1 = \ln(3 + \sqrt{10})$.

43. Berechnen Sie

$$\iint_B x^2 y \, dx \, dy,$$

wobei B von den Geraden $x = 3 + y$, $2y = x$ und von der Hyperbel $2xy = 1$ begrenzt wird und ganz überhalb der x -Achse liegt.