1. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\},$$
$$M_2 = \{0, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \ldots\}.$$

   (a) Drücken Sie M_1 und M_2 durch Angabe einer Eigenschaft formal aus.
   (b) Geben Sie $M_1 \cap M_2$ an.
   (c) Geben Sie $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ an.
   (d) Wieviele voneinander verschiedene echte Teilmengen besitzt $M_1 \cap [0, 10]$?

2. Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} M_1 &= [-4, 5), \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist im Betrag größer als 1 und kleiner als } 7\}, \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}. \end{aligned}$$

   (a) Stellen Sie den Durchschnitt dieser Mengen formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.
   (b) Stellen Sie $(\mathbb{R} \setminus M_1) \cup (\mathbb{R} \setminus M_2)$ formal als Menge und auf der Zahlengerade dar.

3. Bei einer Befragung unter all seinen StammkundInnen stellte der Betreiber einer Pizzeria folgendes fest:

   - 3 KundInnen schmecken alle seiner angebotenen Pizzen,
   - 5 KundInnen gaben an, dass Sie zumindest die Hawaii und die Rustica mögen,
   - 3 KundInnen schmecken zumindest Margherita und Hawaii,
   - 9 KundInnen schmeckt die Rustica,
   - die Anzahl der KundInnen, die ausschließlich Hawaii-Pizza mögen, ist doppelt so groß, wie die Anzahl derer, die ausschließlich Rustica bestellen,
   - addiert man zur Anzahl der Kunden, die nur die Hawaii mögen, die Anzahl jener, die nur Margherita mögen, so erhält man 8 als Ergebnis,
   - unter seinen StammkundInnen zählt er gleich viele, die nur Margherita und Rustica mögen, wie solche, die überhaupt keine Pizza mögen (und nur Getränke konsumieren),
   - nimmt man die Anzahl der StammkundInnen, die gerne Margherita essen, mal 2 und addiert 1, so erhält man die Gesamtanzahl der StammkundInnen.

   (a) Wieviele StammkundInnen besuchen die Pizzeria?
   (b) Am Dienstag treffen sich alle StammkundInnen, die gerne Hawaii-Pizza essen. Wieviele Plätze müssen dafür reserviert werden?

4. Im Rahmen einer Werbeaktion bietet ein Sporthändler an, beim Kauf eines 500 Euro teuren Schimodells die enthaltene Mehrwertsteuer (20 Prozent) zu erstatten. Ein anderer Händler bietet 18 Prozent Rabatt auf das 500 Euro teure Modell. Wo ist der Schi günstiger zu erwerben? Wieviel Prozent beträgt die Ersparnis gegenüber dem schlechteren Angebot?

5. Zeigen Sie die folgenden Identität mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

6. Ein Ballon bewegt sich in konstanter Höhe auf geradlinigem Kurs. Zu Beginn wird er vom Boden aus von einem Beobachter in 500 Metern Entfernung unter einem Höhenwinkel von 75° gesehen. Eine halbe Stunde später – der Beobachter hat sich inzwischen um 15° gedreht – sieht er den Ballon in größerer Entfernung unter einem Winkel von nur mehr 3°. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Ballon?

7. Von vier Punkten A, B, C, D in der Ebene ist folgendes bekannt:
   - D liegt auf der Verlängerung der Strecke durch C und B über B hinaus,
   - die Strecke $\overline{BC}$ misst 300 Meter,
   - die Strecke $\overline{BA}$ misst 500 Meter,
   - $\measuredangle BCA = 75°$,
   - $\measuredangle BAD = 30°$.

   Gesucht ist die Entfernung zwischen A und D.

8. Aus einer Schulklasse mit 22 Kindern sollen zwei Fußballmannschaften gebildet werden. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

9. Bei einer Party sind 25 Personen anwesend.
   (a) Zu Beginn wird paarweise (Jeder mit Jedem einmal) mit Sekt angestoßen. Wie oft erklingt das Glas?
   (b) Da der Selbstauslöser der Kamera defekt ist, wird für das Gruppenfoto ein Fotograf ausgewählt. Die restlichen Personen stellen sich (in einer Reihe) nebeneinander für das Foto auf. Wieviele verschiedene Aufstellungen für das Foto sind denkbar?
   (c) Im Laufe des Abends verteilen sich alle Anwesenden auf Küche, Wohnzimmer, Balkon, Vorraum und WC. Wieviele Aufteilungen sind möglich? Hier soll nicht nur die Anzahl der Personen in den Räumen die Aufteilung charakterisieren, sondern auch, wer sich wo befindet (tauschen zwei Personen ihre Plätze, so sind dies zwei verschiedene Aufteilungen).
   (d) Um Mitternacht verlassen 5 Personen die Party, eine halbe Stunde später 10 und um drei Uhr gehen alle noch Anwesenden nach Hause. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

10. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

$$\text{(a)}\ \frac{x^2+3x-4}{x+1} = x+3$$

$$\text{(b)}\ \frac{x^2-6x+9}{x-3} = x-3$$

$$\text{(c)}\ \sqrt{4x^2-3x-5} - 2x = 0$$

$$\text{(d)}\ \sin x + \frac{\tan 2x}{2} = 0$$

11. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen über den reellen Zahlen:

(a) $2x^4 = 2x^3 + 32x^2 + 34x + 30$,

(b) $x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1 = 0$,

(c) $\Big| -|x+5| + 2 \Big| - |x+3| = 0$.

12. Gegeben sei

$$z = \frac{(7-i)(4+2i)}{1+i}.$$

(a) Berechnen und vereinfachen Sie z und z^2.

(b) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil und den Betrag von z an und stellen Sie z in der komplexen Zahlenebene dar.

(c) Geben Sie ein quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten an, das z als Nullstelle besitzt.

13. Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, die

$$z^3 = -27$$

erfüllen.

14. Lösen Sie folgende Ungleichungen:

(a) $|x-3| + 2|x-7| < |x+5|$,

(b) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x > -3$,

(c) $\dfrac{x^2-13}{x+5} < |2x+7|$.

15. Man faktorisiere $x^{10} - y^{10}$ soweit wie möglich.

16. Finden Sie alle komplexen Zahlen z, die die folgende Gleichung erfüllen. Geben Sie zusätzlich Real- und Imaginärteil der Lösungen an.

$$\frac{z^2 + (1+3i)z + 46 - 2i}{z^2 - (2+5i)z - 3i} = 1$$

17. Gegeben sind die Funktionen f, g, und h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, wobei

   (a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 12x + 12}$,

   (b) $g(x) = \cos(x-3) + 5$,

   (c) $h(x) = 3 - x^5$.

   Stellen Sie (ohne Verwendung der Differentialrechnung) für f, g, und h jeweils fest, ob die Funktion

   - injektiv, surjektiv, bijektiv,
   - beschränkt, nach oben beschränkt, nach unten beschränkt,
   - (streng) monoton wachsend oder fallend,
   - gerade oder ungerade,
   - periodisch ist.
   - Bilden Sie die Umkehrabbildung der Funktion, falls möglich.

18. Sei
$$f : D \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3 - 7\,x^2 + 16\,x - 12}{x^3 - x^2 - 8\,x + 12}.$$
   (a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge D
   (b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
   (c) Bestimmen Sie $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$.
   (e) An welchen Punkten ist f stetig? Wo ist f stetig ergänzbar?

19. Welche der folgenden Grenzwerte reeller Funktionen existieren? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.
   (a) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^4 + 42x^3}$, $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^4 + 42x^3}$, $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^4 + 42x^3}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 3}}$.

20. Seien $A = (0, 9, 1)$ und $B = (27, 12, 16)$. Der Punkt C teilt die Strecke AB im Verhältnis $2 : 1$. Berechnen Sie die Koordinaten von C.

21. Sei g die Gerade durch die Punkte $A = (2, 10, 2)$ und $B = (4, 14, 4)$. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die durch
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
Gerade h mit g einen Schnittpunkt besitzt. Bestimmen Sie diesen.

22. Man bestimme den Schnitt der beiden Ebenen
$$\varepsilon_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\varepsilon_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

23. Bestimmen Sie den Inkreismittelpunkt und den Inkreisradius des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (-11, 1)$, $B = (17, 5)$, $C = (10, -2)$.

24. Uran X_2 zerfällt nach dem Gesetz $f(t) = f(0) \cdot e^{-\lambda t}$, wobei t die Zeit in Sekunden ist. Nach 10 Sekunden sind nur noch 2,3344 ‰ der Ursprungsmenge vorhanden. Wie groß ist λ? Wie lange dauert es, bis von einer Ausgangsmenge nur mehr ein Drittel nicht zerfallen ist?

25. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

    (a) $e^{5x} + 3e^x - 10e^{-3x} = 0$

    (b) $(\ln(x))^2 + 4\ln(x) - 4\ln(e^3) = 0$

26. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

    (a) $\frac{1}{2}\log_2(8e^{-2}) + \frac{1}{\ln(2)}$

    (b) $\frac{\sqrt[x]{e^{(x+3)^2-9}}}{e^{x+1}}$

    (c) $\ln(x^{\frac{2\pi}{3}}) - \ln(\sqrt[3]{x^{5\pi}})$

27. Zeigen Sie, dass für x, $y \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

gilt.

28. Stellen Sie $\operatorname{artanh}(x)$ durch den natürlichen Logarithmus dar. (Die Umkehrfunktion von tanh heißt artanh).

29. (a) Man bestimme den Abstand des Punktes $A = (26, 24, 35)$ von der Ebene $2x + y + 2z = 38$.

    (b) Man bestimme den Abstand des Punktes $B = (12, 2, 6)$ von der Geraden

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 35 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

30. Berechnen Sie folgende Wurzel und stellen Sie alle Lösungen in der komplexen Zahlenebene dar:
$$\sqrt[5]{-32}$$

31. Differenzieren Sie folgende Funktionen:
    (a) $f(x) = (2x + \frac{3}{x^2})^{\frac{2}{3}}$
    (b) $f(x) = \sqrt[4]{2x^2 - \cos(3x+4)}$
    (c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+2}}$
    (d) $f(x) = x\ln(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$
    (e) $f(x) = \exp(\cosh(3x^2) + \operatorname{arcosh}(\frac{1}{x}))$
    (f) $f(x) = (3^x)^4$

32. Bestimmen Sie die Halbachsenlängen und den Abstand der Brennpunkte der Ellipse
$$8x^2 + 32y^2 - 128 = 0.$$
Schneiden Sie dann die Ellipse mit der Geraden $g : y = -x + \frac{1}{2}$.

33. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit, wobei
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

34. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\tan x - \sin x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2}{e^{0.2x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\ln(1+x-x^2)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\cot x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{x}{1-e^x}} + 2^{-\frac{x}{1-e^{-x}}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \tan x$

35. Entwickeln Sie die Funktion
$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-2x}$$
um $x_0 = -1$ in eine Taylorreihe bis zu den Gliedern zweiter Ordnung (d.h. bestimmen Sie die ersten drei Glieder dieser Reihe).

36. Führen Sie auf rechnerischem Wege eine Kurvendiskussion der folgenden beiden Funktionen durch (gehen Sie insbesondere auf die folgenden Punkte ein: Definitionsbereich, Nullstellen, lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten, Verhalten am Rande des Definitionsbereichs, Stetigkeit) und fertigen Sie eine Skizze an.

$$(a) \quad f(x) = \frac{\ln(2x)}{2x}$$
$$(b) \quad f(x) = \sqrt{1-9x^2} - \frac{1}{2}$$

37. Berechnen Sie die Tangentialebene der Fläche $f(x,y) = 22x^3 + 3y^7$ im Punkt $(1,-1)$ und bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs.

38. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} - 2xy + \frac{y^3}{3}.$$

39. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y + z^2 \\ xyz + \sin x \end{pmatrix}.$$

40. Bestimmen Sie folgende Integrale nur mit aus der Vorlesung bekannten Mitteln:

    a) $\int x + \ln \sqrt{x}\, dx$

    b) $\int_0^2 x^3 + 3^{x+3}\, dx$

    c) $\int_3^4 \frac{x^2-4x+4}{x-2}\, dx$

41. Bestimmen Sie jeweils die Fläche zwischen den beiden Funktionen bzw. Kurven:

    a) $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$

    b) $y^2 = 3x$ und $y^2 = x + 10$

42. Berechnen Sie die Bogenlänge der Funktion

$$f(x) = \cosh(x)$$

zwischen $x_0 = 0$ und $x_1 = \ln(-3 + \sqrt{10})$.

43. Berechnen Sie

$$\iint_B xy^2\, dx\, dy,$$

wobei B von den Geraden $x = -1 + 5y$, $y = x$ und von der Hyperbel $xy = 1$ begrenzt wird und ganz über der x-Achse liegt.