Lineare Algebra 2

Erstellt von Markus Windisch nach der Vorlesung von Clemens Heuberger im Sommersemester 2003

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik (Math B)
Technische Universität Graz

Diese Auflage entspricht jenen Teilen der Vorlesung aus dem Sommersemester 2009, die ab Sommersemester 2010 noch Bestandteil der Vorlesung sind. Die ab Sommersemester 2010 neu hinzugekommenen Stoffgebiete sind nicht enthalten.

Stand 587: 14. Juni 2010 18:30:03

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Motivation

0.1 Vektor- und Matrizennormen

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.0001 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 2.0000 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.0001 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 2.0001 \end{pmatrix}.$$

Löse die Gleichungssysteme $Ax^{(1)} = c$, $Ax^{(2)} = d$, $Bx^{(3)} = c$, $Bx^{(4)} = d$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ -0.0001 \end{pmatrix}$$

A ist schlecht konditioniert, $\kappa_2(A) = 40002$, B ist gut konditioniert, $\kappa_2(B) = 2.6184$.

0.2 Skalarprodukte und Orthogonalität

Gegeben seien 200 Punktepaare

0.030309884000	10.179922000000
0.048384392000	10.120494000000
0.083117662000	10.145601000000
⋮	⋮
9.935929800000	94.606340000000
9.967067200000	95.324167000000
9.996520900000	96.100050000000

Gesucht ist jene Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 e^x + a_6 \cos x + a_7 \sin x,$$

die die Punkte am besten approximiert.

0.3 Eigenwerte

0.3.1 Asymptotik von Matrizenprodukten

Betrachte eine (abgeschlossene) Population von Hühnern und Füchsen. Die Anzahl der Hühner zum Zeitpunkt n sei H_n, jene der Füchse F_n. Es gelte

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 0.6F_n + 0.5H_n, \\ H_{n+1} &= -kF_n + 1.2H_n, \qquad\qquad k \text{ „Killrate“}. \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt 0 gibt es $F_0 = 100$ Füchse und $H_0 = 1000$ Hühner.

- Wie entwickeln sich F_n, H_n für $n \to \infty$?
- Wie groß muss k sein, damit beide Populationen aussterben?
- Gibt es einen „stabilen“ Zustand?

0.3.2 Positiv Definite Matrizen

Diskretisieren der stationären Wärmeleitungsgleichung

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \le x \le 1, u(0) = u(1) = 0$$

mit dem finiten Differenzen Schema

$$-\frac{u(x_k+h) - 2u(x_k) + u(x_k-h)}{h^2} = f(x_k)$$

ergibt ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6^2} \begin{pmatrix} f(1/6) \\ \\ \vdots \\ \\ f(5/6) \end{pmatrix} \qquad \text{tridiagonale, positiv definite Matrix}$$

0.4 Singulärwertzerlegung

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.3023161 & 0.7667215 & 0.3111570 \\ -0.2835463 & 0.2194864 & -0.0403317 \\ -0.1163911 & 0.1914451 & 0.0094212 \\ -0.2112675 & 0.4953307 & 0.0587599 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.302324 & 0.766728 & 0.311133 \\ -0.283463 & 0.219550 & -0.040571 \\ -0.116693 & 0.191214 & 0.010283 \\ -0.211201 & 0.495382 & 0.058570 \end{pmatrix}.$$

Numerische Rechnungen ergeben $\operatorname{rank}(A) = 3$, $\operatorname{rank}(B) = 2$ und $\|A - B\|_2 = 0.001$. Wie sieht man einer Matrix an, ob ihr Rang „echt“ ist oder durch numerisches Rauschen verursacht wurde?

Teil I

Matrizennormen

Kapitel 1

Vektor- und Matrizennormen

Notation 1.0.1. Folgende Notationen werden in diesem Skriptum verwendet.
$\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$K :=$ Körper

1.1 Vektornorm

Definition 1.1.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt *Vektornorm* wenn sie die üblichen Normaxiome

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

$(N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

für alle $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt. $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Beispiel 1.1.2. $V = \mathbb{K}^n, p \in \mathbb{N}, \|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$.
Beispiel 1.1.3. $V = \mathbb{K}^n, \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.
Beispiel 1.1.4. $V = \mathcal{C}[a,b], p \in \mathbb{N}, \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$.
Beispiel 1.1.5. $V = \mathcal{C}[a,b], \|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Bemerkung 1.1.6. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann wird V vermittels $d(x,y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum (und damit zu einem topologischen Raum).

Satz 1.1. *(Normäquivalenzsatz)*
Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$. Dann gibt es zwei positive Konstanten c_1 und c_2, sodass für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$c_1\|x\|' \leq \|x\| \leq c_2\|x\|'.$$

Beweis. Zunächst setze: $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$

1. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^t = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &\overset{(N3)}{\leq} \|x_1 e_1\| + \ldots + \|x_n e_n\| \overset{(N2)}{\leq} |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_n| \cdot \|e_n\| \\ &\leq \max_{i=1\ldots n} |x_i| (\underbrace{\|e_1\| + \ldots + \|e_n\|}_{c_3}) \leq \sqrt[2]{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} c_3 = c_3 \|x\|_2. \end{aligned}$$

2. Durch $f(x) := \|x\|$ wird eine Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ erklärt.
   Behauptung: f ist stetige Funktion vom $\mathbb{K}^n$ versehen mit der 2-Norm nach $\mathbb{R}$.
   Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. O.B.d.A $f(x) \leq f(y)$. Dann gilt:
   $$0 \leq f(y) - f(x) = \|y\| - \|x\| = \|(y-x) + x\| - \|x\| \leq \|y - x\| + \|x\| - \|x\| \leq c_3\|x - y\|_2,$$
   also $|f(y) - f(x)| \leq c_3\|x - y\|_2$.
   Daher ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante c_3, also stetig.

3. Die Menge $S := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, daher kompakt.

4. f nimmt auf S sein Minimum bei $x = x_0$ an. Daher gilt $f(x) \geq f(x_0) = c_4 > 0$ für alle $x \in S$.

5. Seien $x \in \mathbb{K}^n, \alpha = \|x\|_2$. Dann gilt:
   $$\|x\| = \left\|\alpha \frac{1}{\alpha} x\right\| = |\alpha| \cdot \|y\| = |\alpha| \underset{\in S}{f(y)} \geq c_4\|x\|_2.$$

6. Sei jetzt $\|\cdot\|'$ eine beliebige Norm. Nach 1-5 gibt es positive c_3, c_4, c_5, c_6 mit:
   $$c_4\|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_3\|x\|_2,$$
   $$c_6\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq c_5\|x\|_2,$$
   $$\underbrace{\frac{c_4}{c_5}}_{c_1}\|x\|' \leq c_4\|x\|_2 \leq \|x\| \leq c_3\|x\|_2 \leq \underbrace{\frac{c_3}{c_6}}_{c_2}\|x\|'.$$

□

Bemerkung 1.1.7. Dadurch wird auf $\mathbb{K}^n$ durch verschiedene Normen dieselbe Topologie definiert.

1.2 Operator- bzw. Matrixnormen

Notation 1.2.1. Die Bezeichnungen „Linearer Operator“ und „lineare Abbildung“ werden in der Folge synonym verwendet.
$K^{m\times n}$ ... Menge der $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus K.

Wie soll man Matrizen eigentlich „messen“?
Jede Matrix $\in K^{m\times n}$ kann als langer Vektor im K^{mn} gedacht werden.

Definition 1.2.2. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, dann definiere
$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} \quad \text{(Frobeniusnorm)}.$$

Bemerkung 1.2.3. $\|\cdot\|_F$ erfüllt die Normaxiome (N1) bis (N3).

Bemerkung 1.2.4. Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$, $x \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt:
$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F\|x\|_2,$$
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F.$$

Die erste dieser Eigenschaften ist besonders wünschenswert ($\|\cdot\|_F$ und $\|\cdot\|_2$ sind verträglich). Für eine interessante Matrixnorm soll also gelten:

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad x \neq 0.$$

Eine mögliche Wahl ist daher

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \; : \; x \neq 0\right\}.$$

Definition 1.2.5. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann definiere:

$$\|F\|_{V,W} := \sup\left\{\frac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} \; : \; x \neq 0\right\}$$

„die von $\|\cdot\|_W$ und $\|\cdot\|_V$ induzierte Operatornorm von F".

Bemerkung 1.2.6. Dadurch wird auch induzierte Matrixnorm definiert.

Satz 1.2 (Eigenschaften von Operatornormen)**.** *Seien* $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W), (X, \|\cdot\|_X)$ *normierte Räume,* $F, H : V \to W, G : W \to X, x \in V, \alpha \in \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

(*N*1) $\|F\|_{V,W} \geq 0$ *und* $\|F\|_{V,W} = 0 \Leftrightarrow F = 0$ *(Nullabbildung),*

(*N*2) $\|\alpha F\|_{V,W} = |\alpha| \cdot \|F\|_{V,W}$,

(*N*3) $\|F + H\|_{V,W} \leq \|F\|_{V,W} + \|H\|_{V,W}$,

(*N*4) $\|F(x)\|_W \leq \|F\|_{V,W}\|x\|_V$,

(*N*5) $\|G \circ F\|_{V,X} \leq \|G\|_{W,X} \cdot \|F\|_{V,W}$.

Beweis von (N3). Es gilt:

$$\frac{\|(F+H)(x)\|_W}{\|x\|_V} = \frac{\|F(x) + H(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \frac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} + \frac{\|H(x)\|_W}{\|x\|_V} \leq \|F\|_{V,W} + \|H\|_{V,W}.$$

Bildet man auf beiden Seiten das Supremum über alle $x \neq 0$, so folgt

$$\|F + H\|_{V,W} \leq \|F\|_{V,W} + \|H\|_{V,W}.$$

□

Bemerkung 1.2.7. Seien $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$, $F : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\|F\| = \max\{\|F(x)\|_W \; : \; \|x\|_V = 1\}$$

Beweis. Da

$$\frac{\|F(x)\|}{\|x\|} \overset{(N2)}{=} \left\|\frac{1}{\|x\|} \cdot F(x)\right\| = \left\|F\underbrace{\left(\frac{1}{\|x\|} \cdot x\right)}_{\|\cdot\|=1}\right\|,$$

müssen nur x mit $\|x\|_V = 1$ betrachtet werden. Da diese eine kompakte Menge bilden, wird das Supremum tatsächlich angenommen, es handelt sich also um ein Maximum. □

Satz 1.3. *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Dann gilt*

- $\|A\|_\infty := \|A\|_{\infty,\infty} = \max\limits_{i=1\ldots n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ *„Zeilensummennorm",*

- $\|A\|_1 = \|A\|_{1,1} = \max\limits_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ *„Spaltensummennorm“.*

Beweis. • Sei $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$. Dann gilt

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |(Ax)_i| = \max_{i=1\dots n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\le \|x\|_\infty = 1} \le \max_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

und damit $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max\limits_{i=1\dots n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, wähle $k \in \{1, \dots n\}$ so, dass $\sum\limits_{j=1}^n |a_{kj}| = \max\limits_{i=1\dots n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Mann muss x_j so wählen, dass $|x_j| = 1$ und $|a_{kj}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{1} = a_{kj} x_j$. Setze

$$x_j = \begin{cases} \frac{|a_{kj}|}{a_{kj}} & a_{kj} \ne 0 \\ 1 & a_{kj} = 0 \end{cases}.$$

Jetzt gilt also in obiger Ungleichung überall Gleichheit.

□

Kapitel 2

Sensitivität linearer Gleichungssysteme

2.1 Konditionszahl, Sensitivität linearer Gleichungssysteme bei Störung der rechten Seite

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A(x + \triangle x) &= b + \triangle b \end{aligned}$$

Wie groß ist $\triangle x$ höchstens?

Sei $\|\cdot\|$ in diesem und im nächsten Abschnitt eine feste Norm.

Was ist ein vernünftiges Maß für $\triangle x$?

- $\|\triangle x\|$ ... absoluter Fehler (uninteressant)
- besser: $\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|}$ ... relativer Fehler

Es gilt:

$$\begin{aligned} Ax + A\triangle x &= b + \triangle b, \\ A\triangle x &= \triangle b, \\ \triangle x &= A^{-1}\triangle b, \\ \|\triangle x\| &= \|A^{-1}\triangle b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\triangle b\|, \\ \|b\| &= \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

also $\|x\| \geq \frac{1}{\|A\|}\|b\|$, zusammen erhalten wir

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}.$$

Definition 2.1.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann definiere

$$\kappa(A) := \begin{cases} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| & \text{... falls A regulär,} \\ +\infty & \text{... falls A singulär.} \end{cases}$$

„Konditionszahl von A.“

Satz 2.1. *Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, b, $\triangle b$, x, $\triangle x \in \mathbb{K}^n$, A regulär, $Ax = b$, $A(x + \triangle x) = (b + \triangle b)$. Dann gilt:*

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}.$$

Bemerkung 2.1.2.

1. Die Konditionszahl hängt von der gewählten Norm ab. Wegen des Normäquivalenzsatzes heißt allerdings große Konditionszahl in einer Norm auch große Konditionszahl in jeder anderen Norm.

2. große Konditionszahl $\Rightarrow$ Matrix schlecht konditioniert,
kleine Konditionszahl $\Rightarrow$ Matrix gut konditioniert.

3. geg. Gleichungssystem $Ax = b$ (riesig). Sei $\tilde{x}$ eine Näherungslösung (z.B. aus iterativem Verfahren) Sei $r := A\tilde{x} - b$ „Residuum" . Anders geschrieben: $Ax = b, \quad A\tilde{x} = b + r$,

$$\xrightarrow{\text{Satz}} \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

2.2 Sensitivität eines Gleichungssystems bei beidseitiger Störung

Notation 2.2.1. $I \ldots$ Einheitsmatrix

Lemma 2.2.2. *Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|B\| < 1$. Dann ist $I - B$ invertierbar, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ konvergiert, es gilt $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ und $\|(I - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$.*

Beweis. 1. Annahme: $I - B$ ist nicht invertierbar, d.h. es gibt ein $x \neq 0$, sodass $(I - B)x = 0$. Dann gilt $x = Bx$.

$$\|x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\| < \|x\| \qquad \text{Widerspruch.}$$

2.

$$(I - B)\sum_{k=0}^{N} B^k = \sum_{k=0}^{N} B^k - \sum_{k=0}^{N} B^{k+1} = I - B^{N+1}$$

daraus folgt:

$$\sum_{k=0}^{N} B^k = (I - B)^{-1}(I - B^{N+1})$$

Da $\|B^{N+1}\| \leq \underbrace{\|B\|}_{<1}{}^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$, folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k = (I - B)^{-1}.$$

3.

$$\|(I - B)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\|B\|}_{<1}{}^k = \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

□

Satz 2.2. *Seien* A, $\triangle A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, b, $\triangle b$, x, $\triangle x \in \mathbb{K}^n$. *Es gelte* $Ax = b, (A+\triangle A)(x+\triangle x) = b+\triangle b$, $\delta := \max\left\{\frac{\|\triangle A\|}{\|A\|}, \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}\right\}$, $r := \delta\kappa(A) < 1$. *Weiters sei* A *regulär. Dann gilt:*

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\kappa(A)}{1-r} \cdot \max\left\{\frac{\|\triangle A\|}{\|A\|}, \frac{\triangle b\|}{\|b\|}\right\}.$$

Beweis. 1. Brauche zunächst die Inverse von $(A + \triangle A) = (A + I\triangle A) = A(I + A^{-1}\triangle A)$.
Wir wissen: $\|A^{-1}\triangle A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\triangle A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \delta \cdot \|A\| = \delta\kappa(A) = r < 1$.
$\Rightarrow$ obengenannte Matrix ist invertierbar (laut Lemma).

2. Multipliziere von links mit A^{-1}

$$\begin{aligned}
(I + A^{-1}\triangle A)(x + \triangle x) &= x + A^{-1}\triangle b, \\
x + \triangle x + A^{-1}\triangle A(x + \triangle x) &= x + A^{-1}\triangle b, \\
\triangle x &= A^{-1}\triangle b - A^{-1}\triangle A(x + \triangle x), \qquad (2.1) \\
\|\triangle b\| \leq \delta\|b\| &= \delta\|Ax\| \leq \delta\|A\| \cdot \|x\|,
\end{aligned}$$

$$\|x + \triangle x\| = \|(I + A^{-1}\triangle A)^{-1}(x + A^{-1}\triangle b)\| \leq \|(I + A^{-1}\triangle A)^{-1}\| \cdot (\|x\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\triangle b\|)$$

und laut Lemma gilt

$$\leq \frac{1}{1-r}(\|x\| + \underbrace{\delta \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\kappa}}_{r} \cdot \|x\|) = \frac{1+r}{1-r}\|x\|.$$

Alles in (2.1) einsetzen ergibt

$$\|\triangle x\| \leq \underbrace{\delta\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{\delta\kappa(a)} \cdot \|x\| + \delta\kappa(A)\frac{1+r}{1-r}\|x\| = \delta\kappa(A)\underbrace{\left(1 + \frac{1+r}{1-r}\right)}_{\frac{2}{1-r}}\|x\|,$$

daraus folgt

$$\frac{\|\triangle x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\kappa(A)}{1-r} \max\left\{\frac{\|\triangle A\|}{\|A\|}, \frac{\|\triangle b\|}{\|b\|}\right\}.$$

$\square$

Teil II

Innere Produkte

Kapitel 3

Innere Produkte und Orthogonalität

3.1 Unitäre Räume und Euklidsche Räume

Definition 3.1.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt inneres Produkt (bzw. Hermitesches Produkt/Form für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder Skalarprodukt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), falls für alle $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$(IP1)$ $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ (Linearität im 2. Argument)

$(IP2)$ $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$(IP3)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Wenn zusätzlich

$(IP4)$ $\langle x, x\rangle \; > 0 \qquad$ für $x \neq 0$

gilt, so heißt das IP positiv definit (p.d.)
$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Inner-Produktraum (bzw. wenn das IP positiv definit ist, unitärer Raum falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, oder Euklidscher Raum falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Bemerkung 3.1.2.

1. $$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y\rangle} = \overline{\alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle} = \\ = \overline{\alpha}\overline{\langle z, x\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle z, y\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, z\rangle + \overline{\beta}\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

2. Achtung: Definitionen, Namen, Position der Konjugation variieren.

Beispiel 3.1.3. $V = \mathbb{R}^n \quad \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y$
„Standard-inneres-Produkt“, ist positiv definit.

Notation 3.1.4. Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ schreiben wir

$$A^H = A^* := \overline{A}^t$$

die zu A adjungierte Matrix.

Bemerkung 3.1.5.

$$\begin{aligned}(A + B)^* &= A^* + B^* \\ (\alpha A)^* &= \overline{\alpha} A^* \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ (A^*)^* &= A\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.6. $V = \mathbb{C}^n$
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \overline{x}^t y = x^* y$$
=„Standard-IP“. Da
$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=n}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0,$$
ist das IP positiv definit.

Beispiel 3.1.7. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$. Dann ist
$$\langle x, y\rangle_A := x^* A y$$
ein inneres Produkt.

Beispiel 3.1.8. $V = \mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \,:\, f \,\text{stetig}\}$
$$\langle f, g\rangle := \int\limits_{x=a}^{b} \overline{f(x)} g(x) dx$$

3.2 Durch innere Produkte induzierte Normen

Definition 3.2.1. Sei V ein Vektorraum mit p.d. IP $\langle\cdot,\cdot\rangle$, für $x \in V$ definiere
$$\|x\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$
„Durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Vektornorm“.

Lemma 3.2.2 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *V sei ein Innerer-Produktraum (p.d.), $x, y \in V$. Dann gilt*
$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$
Beweis. Da für $y = 0$ beide Seiten verschwinden, ist in diesem Fall nichts zu zeigen. Wir können daher annehmen, dass $y \neq 0$. Sei $\mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt
$$0 \le \langle x + \mu y, x + \mu y\rangle = \langle x, x\rangle + \overline{\mu}\langle y, x\rangle + \mu\langle x, y\rangle + \overline{\mu}\mu\langle y, y\rangle.$$
Wähle $\mu = -\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Es folgt
$$\begin{aligned}
0 &\le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle,\\
0 &\le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle},\\
\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} &\le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,\\
|\langle x, y\rangle|^2 &\le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.
\end{aligned}$$
□

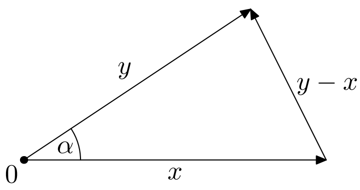
Satz 3.1. *Die vorhin definierte Norm $\|x\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle} := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist tatsächlich eine Vektornorm.*

Beweis. (N1) und (N2) sind klar. Wir zeigen (N3):
$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle =\\
= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle x, y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\cdot \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le\\
\le \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| &\overset{C.S.}{\le} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| =\\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$
□

Bemerkung 3.2.3. Das Standard IP auf $\mathbb{K}^n$ induziert die $\|\cdot\|_2$-Norm.

3.3 Skalarprodukt und Winkel

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(„Cosinus-Satz“)}\\
a &= \|y-x\|, \quad b = \|y\|, \quad c = \|x\|\\
\|y-x\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cos\alpha\\
\|y-x\|^2 &= \langle y-x, y-x\rangle = \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle x,x\rangle
\end{aligned}
$$



Daraus folgt

$$\cos\angle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

Für normierte Vektoren ist das Standard-Skalarprodukt gleich dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Wenn x und y den Winkel von $90°$ einschließen: $\langle x,y\rangle = 0$ „x und y sind orthogonal“.

3.4 Orthogonalität

In diesem Abschnitt sind alle IP p.d..

Definition 3.4.1. Sei V ein IPR, $v,w\in V$. v und w heißen *orthogonal*, wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

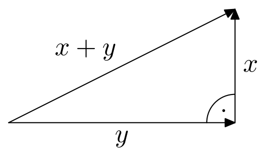
Beispiel 3.4.2. $V=\mathbb{K}^n$, Standard IP, $v=e^i, w=e^j, i\neq j$.

Satz 3.2 (Satz von Pythagoras)**.** *Seien x,y orthogonale Vektoren, dann gilt:*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Beweis.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{0} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



$\square$

Definition 3.4.3. Sei V ein IPR und W ein Teilraum von V, dann heißt

$$W^\perp := \{v\in V : \langle v,w\rangle = 0 \quad \forall w\in W\}$$

das „orthogonales Komplement von W“

Proposition 3.4.4. *Seien $V,W,W^\perp$ wie in Definition 3.4.3. Dann ist $W^\perp$ ein Teilraum von V.*

Beweis. Seien $v,v'\in W^\perp, \alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Dann gilt für alle $w\in W$

$$\langle w, \alpha v + \beta v'\rangle = \alpha\underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0} + \beta\underbrace{\langle w,v'\rangle}_{=0} = 0.$$

$\square$

Proposition 3.4.5. $W\cap W^\perp = \{0\}$.

Beweis. Sei $v \in W$ und $v \in W^{\perp}$. Dann gilt

$$\langle v, w\rangle = 0 \quad \text{für } w \in W$$

und speziell für $w = v$:

$$0 = \langle v, v\rangle \Rightarrow v = 0.$$

□

Definition 3.4.6. Sei V ein IPR, $S \subseteq V$. S heißt Orthogonalsystem, wenn:

- $v \neq 0 \quad \forall v \in S$,
- $\langle v, w\rangle = 0 \quad$ für $v \neq w \in S$.

Wenn zusätzlich

- $\langle v, v\rangle = 1 \quad \forall v \in S$

gilt, heißt S ein Orthonormalsystem. Ist S eine Basis eines Teilraumes W, so heißt S eine Orthogonalbasis bzw. Orthonormalbasis von W.

Beispiel 3.4.7. $V = \mathbb{K}^n$, $S = \{e^1, \dots, e^n\}$ ist Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$.
Beispiel 3.4.8. $V = \mathcal{C}[-\pi, \pi]:\ g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$
Behauptung : $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist ein Orthonormalsystem.

$$\begin{aligned}
\langle g_n, g_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} & m \neq n \\ x\big|_{-\pi}^{\pi} & m = n \end{cases} \\
&= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{\cos((m-n)\pi)+i\sin((m-n)\pi)-\cos((m-n)\pi)+i\sin((m-n)\pi)}{i(m-n)} & m \neq n \\ \pi - (-\pi) & m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

Proposition 3.4.9. *Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.*

Beweis. Seien $v^1, \dots, v^k \in S$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
&0 = \lambda_1 v^1 + \ldots + \lambda_k v^k \\
&0 = \lambda_1 \underbrace{\langle v^i, v^1\rangle}_{0} + \ldots + \lambda_i \langle v^i, v^i\rangle + \ldots + \lambda_k \underbrace{\langle v^i, v^k\rangle}_{0} = \lambda_i \underbrace{\langle v^i, v^i\rangle}_{\neq 0}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, k$. □

3.5 Darstellung von Inneren Produkten durch Matrizen

$M \in \mathbb{K}^{n\times n}, M^* = M, \langle x, y\rangle_M := x^* My$ ist inneres Produkt.

Satz 3.3. *Sei V ein endlich-dimensionaler IPR (IP nicht notwendigerweise p.d.) mit einer festen Basis $B = \{v^1, \ldots, v^d\}$ mit der Koordinatenabbildung $\Phi_B : \mathbb{K}^d \to V$. Dann gibt es genau eine Matrix M, sodass für alle x, $y \in V$*

$$\langle x, y\rangle = \Phi_B^{-1}(x)^* M \Phi_B^{-1}(y).$$

gilt. Für diese Matrix gilt $M = M^*$. Explizit gilt $M = (m_{jk})_{\substack{1\le j\le d\\1\le k\le d}}$ mit

$$m_{jk} = \left\langle v^j, v^k\right\rangle. \tag{3.1}$$

Beweis. Sei $x = \sum\limits_{j=1}^d x_j v^j$ und $y = \sum\limits_{j=1}^d y_j v^j$, also $\Phi_B^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_d)^t$ und $\Phi_B^{-1}(y) = (y_1, \ldots, y_d)^t$, dann gilt

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^d x_j v^j, \sum_{k=1}^d y_k v^k \right\rangle = \sum_{j,k} \overline{x_j} \underbrace{\langle v^j, v^k\rangle}_{m_{jk}} y_k = \Phi_B^{-1}(x)^* M \Phi_B^{-1}(y).$$

Somit gilt $m_{jk} = \langle v^j, v^k\rangle_{1\le j,k\le d}$. Für M^* folgt daraus:

$$M^* = (\overline{\langle v^j, v^k\rangle})_{\substack{1\le k\le d\\1\le j\le d}} = (\langle v^k, v^j\rangle)_{\substack{1\le k\le d\\1\le j\le d}} = M.$$

Falls es eine zweite Matrix gibt, sagen wir N, dann folgt daraus, dass für alle x, y

$$\Phi_B^{-1}(x)^* M \Phi_B^{-1}(y) = \langle x, y\rangle = \Phi_B^{-1}(x)^* N \Phi_B^{-1}(y)$$

gilt, also $\Phi_B^{-1}(x)^*(M - N)\Phi_B^{-1}(y) = 0$. Sei nun $C = M - N$, dann gilt für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$: $u^* C v = 0$. Sei nun $u = e^i, v = e^j$. Dann folgt

$$(e^i)^* C e^j = c_{ij},$$

für alle i, j, somit muss $C = 0$ gelten und daraus folgt schließlich $M = N$. □

Definition 3.5.1. Mit den Bezeichnungen von Satz 3.3 heißt M die Matrixdarstellung von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ bezüglich der Basis B.

Wie ändert sich die Matrixdarstellung bei Übergang zu einer neuen Basis?

Satz 3.4. *Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein IPR, $B = (v^1, \ldots, v^d)$ und $C = (w^1, \ldots, w^d)$ zwei Basen von V mit Übergangsmatrix $S = (s_{jk})_{\substack{1\le j\le d\\1\le k\le d}} \in \mathbb{K}^{d\times d}$, d.h.*

$$w^k = \sum_{j=1}^d s_{jk} v^j,$$

und M die Matrixdarstellung von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ bezüglich der Basis B. Dann ist die Matrixdarstellung von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ bezüglich der Basis C durch

$$N = S^* M S$$

gegeben.

Beweis. Wir schreiben $N = (n_{i\ell})_{\substack{1\le i\le d\\1\le \ell\le d}}$. Laut (3.1) gilt

$$n_{i\ell} = \left\langle w^i, w^\ell\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^d s_{ji} v^j, \sum_{k=1}^d s_{k\ell} v^k \right\rangle = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \overline{s_{ji}} \left\langle v^j, v^k\right\rangle s_{k\ell} = (S^* M S)_{i\ell}.$$

□

3.6 Sylvesterscher Trägheitssatz und Positiv Definite Matrizen 1

Definition 3.6.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $q : V \to \mathbb{R}$. Dann heißt q eine *quadratische Form* auf V, wenn es ein IP $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ auf V gibt, sodass für alle $x \in V$ gilt, dass $q(x) = \langle x, x\rangle$. In diesem Fall heißt q die durch $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ induzierte quadratische Form.

Bemerkung 3.6.2. Jedes IP $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ auf einem Vektorraum V induziert eine quadratische Form: Schließlich gilt $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$ für alle $x \in V$, also ist $\langle x, x\rangle$ für alle $x \in V$ eine reelle Zahl.

Das innnere Produkt kann aus der Kenntnis der quadratischen Form rekonstruiert werden:

Proposition 3.6.3. *Sei $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ ein IPR und q die durch $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ induzierte quadratische Form.*

1. *Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so gilt*
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$$
für alle x, $y \in V$.

2. *Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt*
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) - iq(x + iy) + iq(x - iy)).$$

Beweis. 1. Es gilt
$$\begin{aligned} q(x + y) - q(x - y) &= \langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle - \langle y, y\rangle \\ &= 4 \langle x, y\rangle . \end{aligned}$$

2. Es gilt
$$\begin{aligned} q(x + y) - q(x - y) + q(x + iy) - q(x - iy) = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ -\langle x, x\rangle+\langle y, x\rangle+\langle x, y\rangle-\langle y, y\rangle-i \langle x, x\rangle+\langle x, y\rangle-\langle y, x\rangle-i \langle y, y\rangle+i \langle x, x\rangle+\langle x, y\rangle-\langle y, x\rangle+i \langle y, y\rangle \\ = 2(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}) + 2(\langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle}) = 4\Re \langle x, y\rangle + 4i\Im \langle x, y\rangle = 4 \langle x, y\rangle . \end{aligned}$$

□

Definition 3.6.4. Sei $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ ein IPR und q die durch $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ induzierte quadratische Form. Dann heißen $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ und q

1. *positiv definit*, wenn $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) = \langle x, x\rangle > 0$,
2. *negativ definit*, wenn $\forall x \in V \setminus \{0\} : q(x) = \langle x, x\rangle < 0$,
3. *positiv semidefinit*, wenn $\forall x \in V : q(x) = \langle x, x\rangle \geq 0$,
4. *negativ semidefinit*, wenn $\forall x \in V : q(x) = \langle x, x\rangle \leq 0$,
5. *indefinit*, wenn es weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, es also ein $x \in V$ mit $q(x) = \langle x, x\rangle > 0$ und ein $y \in V$ mit $q(y) = \langle y, y\rangle < 0$ gibt.

Satz 3.5 (Sylvester'scher Trägheitssatz)**.** *Sei $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ ein IPR der Dimension $n < \infty$. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ die Matrixdarstellung*
$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots , 1}_{r}, \underbrace{-1, \dots , -1}_{s}, \underbrace{0, \dots , 0}_{n-r-s})$$

für passende r, $s \geq 0$ besitzt. Die Größen r und s hängen nicht von der gewählten Basis ab, genauer gilt

$$r = \max\{\dim W \mid W \subseteq V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle|_W \textit{ ist positiv definit}\}, \tag{3.2}$$

$$s = \max\{\dim W \mid W \subseteq V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle|_W \textit{ ist negativ definit}\}. \tag{3.3}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir betrachten nun Fall eines allgemeinen n. Wenn $\langle x, y\rangle = 0$ für alle x, $y \in V$, so kann man eine beliebige Basis wählen; bezüglich dieser wird $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ durch die Nullmatrix dargestellt.

Wir können also voraussetzen, dass es x, $y \in V$ mit $\langle x, y\rangle \neq 0$ gibt. Nach Proposition 3.6.3 gibt es daher ein $z \in V$ mit $\langle z, z\rangle \neq 0$. Ersetzt man z durch $u = (1/\sqrt{|\langle z, z\rangle|})z$, so erhält man $\langle u, u\rangle = \langle z, z\rangle / |\langle z, z\rangle| \in \{\pm 1\}$.

Wir betrachten nun $W = \{w \in V \mid \langle u, w\rangle = 0\}$. Das ist der Kern der linearen Abbildung $w \mapsto \langle u, w\rangle$ von V nach $\mathbb{K}$, die wegen $\langle u, u\rangle \neq 0$ nicht die Nullabbildung ist. Somit hat diese lineare Abbildung Rang 1, nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt somit $\dim W = n - 1$ und damit $V = W \oplus \operatorname{span}\{u\}$.

Für die Einschränkung $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle|_W$ von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ auf W kann somit die Induktionsannahme angewandt werden, wodurch wir $\{u\}$ durch eine Basis von W zu einer Basis von V ergänzen können, bezüglich der (angesichts $\langle u, w\rangle = 0$ für $w \in W$) $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, \pm 1\}$ dargestellt wird. Durch Permutation der Basiselemente kann im Bedarfsfall die im Satz angegebene Anordnung der Diagonalelemente erreicht werden.

Zum Beweis von (3.2) bezeichnen wir die gefundene Basis von V mit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und das Maximum auf der rechten Seite von (3.2) mit M.

Wir betrachten zunächst $W_r = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$. Für $x \in W_r \setminus \{0\}$ gibt es eine Darstellung $x = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$ für passende Skalare α_j. Somit gilt

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \overline{\alpha_j}\alpha_k \langle v_j, v_k\rangle = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \overline{\alpha_j}\alpha_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{r} |\alpha_j|^2 > 0,$$

wobei das Kronecker-Delta δ_{jk} für $\langle v_j, v_k\rangle$ aufgrund der speziellen Gestalt der Matrixdarstellung auftritt. Somit ist $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle|_{W_r}$ positiv definit und es folgt $M \geq r$.

Um $M \leq r$ indirekt zu zeigen, nehmen wir an, es gebe ein W mit $\dim W > r$, sodass $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle|_W$ positiv definit ist. Weiters setzen wir $U = \operatorname{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$, wobei es sich um einen Unterraum der Dimension $\dim U = n - r$ handelt. Nach der Dimensionsformel für direkte Summen folgt $U \cap W \neq \{0\}$. Wir können daher ein $0 \neq x \in U \cap W$ wählen. Wir stellen x als $x = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j$ für passende Skalare α_j dar. Somit gilt

$$0 < \langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_k v_k \right\rangle = \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{k=r+1}^{n} \overline{\alpha_j}\alpha_k \langle v_j, v_k\rangle = \sum_{j=r+1}^{n} |\alpha_j|^2 \langle v_j, v_j\rangle \leq 0,$$

ein Widerspruch.

Schließlich ergibt sich (3.3) durch Anwendung des Bewiesenen auf $-\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. □

Definition 3.6.5. Sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein IPR mit r und s wie in (3.2) und (3.3). Dann heißt $r + s$ der Rang von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ und $r - s$ die Signatur von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Manchmal wird auch das Paar (r, s) als Signatur von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ bezeichnet.

Definition 3.6.6. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$. Dann heißt A positiv definit/negativ definit/positiv semidefinit/negativ semidefinit/indefinit, wenn das durch A induzierte innere Produkt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_A$ (mit $\langle x, y\rangle_A = x^*Ay$) positiv definit/negativ definit/positiv semidefinit/negativ semidefinit/indefinit ist.

Angesichts von Satz 3.4 ist folgendes Lemma keine Überraschung:

Lemma 3.6.7. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ positiv definit und $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann ist auch S^*AS positiv definit.*

Beweis. Für $x \neq 0$ gilt wegen der Regularität von S auch $Sx \neq 0$ und daher

$$\langle x, x \rangle_{S^*AS} = x^* S^* A S x = (Sx)^* A(Sx) = \langle Sx, Sx \rangle_A > 0.$$

$\square$

Satz 3.6 (Hauptminorenkriterium für positiv definite Matrizen)**.** *Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $A^* = A$. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren von A positiv sind, d.h., wenn* $\det A^{(k)} > 0$ *für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, wobei $A^{(k)}$ die linke obere $(k \times k)$-Teilmatrix von A ist.*

Beweis. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir $W_k = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$. In beiden Richtungen des Beweises werden wir die Einschränkung $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ von $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A$ auf W_k betrachten. Die Matrixdarstellung von $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ ist durch $A^{(k)}$ gegeben. Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz (Satz 3.5) gibt es eine Basis B_k von W_k und damit eine reguläre Matrix $S_k \in \mathbb{K}^{k \times k}$, sodass $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ bezüglich B_k durch eine Diagonalmatrix D_k mit Diagonaleinträgen aus $\{0, \pm 1\}$ dargestellt wird und damit $A^{(k)} = S_k^* D_k S_k$ gilt. Somit gilt $\det A^{(k)} = |\det S_k|^2 \det D_k$, das heißt, dass die Vorzeichen von $\det A^{(k)}$ und von $\det D_k$ gleich sind. Schließlich ist $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ genau dann positiv definit, wenn $A^{(k)}$ und damit D_k positiv definit sind, was genau dann der Fall ist, wenn alle Diagonalelemente von D_k gleich $+1$ sind.

Wir nehmen zunächst an, dass A positiv definit ist. Dann ist auch $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ positiv definit. Daraus folgt angesichts obiger Überlegungen $\det D_k = 1^k = 1$ und damit $\det A^{(k)} > 0$.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass alle Hauptminoren positiv sind. Durch Induktion nach k beweisen wir, dass $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ für alle k positiv definit ist. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, da $A^{(1)}$ genau dann positiv definit ist, wenn der einzige Eintrag, der gleichzeitig $\det A^{(1)}$ ist, positiv ist. Für den Schritt von $k-1$ auf k können wir somit annehmen, dass $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_{k-1}}$ positiv definit ist. Nach (3.2) enthält D_k mindestens $k-1$ Einträge $+1$. Da nach Voraussetzung $\det D_k > 0$ gilt, müssen sämtliche Diagonalelemente von D_k gleich $+1$ sein, also sind D_k, $A^{(k)}$ und damit $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_A|_{W_k}$ positiv definit. $\square$

Korollar 3.6.8. *Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $A^* = A$. Dann ist A genau dann negativ definit, wenn alle Hauptminoren von A abwechselnd negativ und positiv sind, d.h., wenn* $\det A^{(k)} < 0$ *für ungerades $k \in \{1, \ldots, n\}$ und* $\det A^{(k)} > 0$ *für gerades $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.*

Beweis. Wende Satz 3.6 auf $-A$ an. Aus dem k-reihigen Hauptminor ist damit ein Faktor von $(-1)^k$ herauszuheben. $\square$

Kapitel 4

Innere Produkte und Lineare Abbildungen

4.1 Adjungierte Abbildungen

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ via $x \mapsto Ax$. $A^* = \overline{A^t}$ ist Abbildung $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$.

Beispiel 4.1.1. Standard-IP. Für $y \in \mathbb{K}^m, x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\underset{\text{im } \mathbb{K}^m}{\langle y, Ax \rangle} = y^* Ax = y^*(A^*)^* x = (A^* y)^* x = \underset{\text{im } \mathbb{K}^n}{\langle A^* y, x \rangle}$$

Definition 4.1.2. Seien V, W IPR mit IP $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, $F : V \to W$ linear. Eine Abbildung $F^* : W \to V$ heißt zu F adjungiert, wenn $\langle y, F(x) \rangle_W = \langle F^*(y), x \rangle_V, \quad \forall x \in V, \forall y \in W$.

Beispiel 4.1.3. Fortsetzung des Beispiels 4.1.1.
Ist $F : x \mapsto Ax$ so ist $F^* : y \mapsto A^* y$ zu F adjungiert.

Lemma 4.1.4. *Seien V ein IPR mit p.d. IP und $x, x' \in V$. Gilt $\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle \quad \forall y \in V$, dann gilt $x = x'$.*

Beweis.

$$\langle x - x', y \rangle = 0 \quad \forall y \in V$$

Wähle $y = x - x'$. Daraus folgt

$$\langle x - x', x - x' \rangle = 0$$

und daraus folgt wiederum $x - x' = 0 \Rightarrow x = x'$. □

Proposition 4.1.5. *Seien V, W, F, F^* wie in Definition 4.1.2, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei p.d.. Dann ist $F^* : W \to V$ linear.*

Beweis. Seien $y, z \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $x \in V$

$$\begin{aligned} \langle F^*(\alpha y + \beta z), x \rangle &= \langle \alpha y + \beta z, F(x) \rangle = \overline{\alpha} \langle y, F(x) \rangle + \overline{\beta} \langle z, F(x) \rangle = \\ &= \overline{\alpha} \langle F^*(y), x \rangle + \overline{\beta} \langle F^*(z), x \rangle = \langle \alpha F^*(y) + \beta F^*(z), x \rangle \end{aligned}$$

und aus Lemma 4.1.4 folgt nun

$$F^*(\alpha y + \beta z) = \alpha F^*(y) + \beta F^*(z).$$

□

Proposition 4.1.6. *Seien V, W, F wie in Definition 4.1.2. Die IP seien p.d.. $G, H : W \to V$ seien zu F adjungiert. Dann folgt $G = H$.*

Beweis. Für alle $x \in V$ und y $\in W$ gilt

$$\langle G(y), x\rangle = \langle y, F(x)\rangle = \langle H(y), x\rangle,$$

und aus Lemma 4.1.4 folgt

$$G(y) = H(y) \quad \forall y \in W$$

und daraus folgt natürlich $G = H$. $\square$

Satz 4.1. *Seien V, W IPR mit p.d. IP. V sei endlich-dimensional, $F : V \to W$ linear. Dann gibt es genau eine Abbildung $F^* : W \to V$, die zu F adjungiert ist. Sie ist gegeben durch*

$$F^*(y) = \sum_{j=1}^{d} c_j v^j, \text{ wobei } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = \left(\langle v^i, v^j\rangle\right)^{-1}_{1\leq i,j\leq d} \begin{pmatrix} \langle F(v^1), y\rangle \\ \vdots \\ \langle F(v^d), y\rangle \end{pmatrix}$$

und $\{v^1, \dots, v^d\}$ eine Basis von V ist.

Beweis. Sei $\{v^1, \dots v^d\}$ eine Basis von V und $y \in W$. Wir setzen

$$F^*(y) = \sum_{j=1}^{d} c_j v^j$$

an, dann gilt:

$$\langle x, F^*(y)\rangle = \langle x, \sum_{j=1}^{d} c_j v^j\rangle = \sum_{j=1}^{d} c_j \langle x, v^j\rangle.$$

Andererseits gilt $\langle x, F^*(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle$ und daraus folgt:

$$\sum_{j=1}^{d} \langle x, v^j\rangle c_j = \langle F(x), y\rangle \quad \forall x \in V.$$

Da V endlich-dimensional ist, müssen nur die $x = v^i$ mit $i = 1, \dots, d$ überprüft werden, für alle anderen x folgt es aus Linearkombination.

$$\sum_{j=1}^{d} \langle v^i, v^j\rangle c_j = \langle F(v^i), y\rangle \quad i = 1, \dots, d$$

Das ist ein lineares GLS mit Systemmatrix:

$$M = (\langle v^i, v^j\rangle)_{1\leq i,j\leq d} \in \mathbb{K}^{d\times d}.$$

Wenn M regulär ist, so hat das lineare GLS eine eindeutige Lösung, nämlich

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \langle F(v^1), y\rangle \\ \vdots \\ \langle F(v^d), y\rangle \end{pmatrix}.$$

Annahme: M ist singulär. Dann existiert ein $u \neq 0 \in \mathbb{K}^d$, sodass $Mu = 0$ gilt, und daraus folgt $u^*Mu = 0$.

$$0 = u^*Mu = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \overline{u_i}\langle v^i, v^j\rangle u_j = \left\langle \sum_{i=1}^{d} u_i v^i, \sum_{j=1}^{d} u_j v^j \right\rangle,$$

und daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{d} u_i v^i = 0 \overset{v^j \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} u_1 = \ldots = u_d = 0, \quad \text{Widerspruch.}$$

$\square$

Beispiel 4.1.7. Fortsetzung des Beispiels 4.1.1. Überprüfe Formel an diesem Spezialfall. Sei $v^i = e^i$ der i-te Einheitsvektor

$$\langle e^i, e^j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}, \quad M = I, \quad M^{-1} = I.$$

$F(e^i) = a^i \dots i$-te Spalte von A

$$\begin{aligned} \langle F(e^i), y \rangle &= (a^i)^* y \\ (\langle F(e^i), y \rangle)_{i=1,\dots,d} &= ((a^1)^*, \dots, (a^d)^*)^t y = A^* y \\ c &= I A^* y = A^* y \\ F^*(y) &= \sum_{i=1}^{d} c_j e^j = (c_1 \dots c_d)^t = A^* y \end{aligned}$$

Definition 4.1.8. Sei V IPR, $F : V \to V$ linear. F heißt *selbstadjungiert*, wenn $F = F^*$ ($A\dots$hermitsch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A\dots$ symmetrisch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Beispiel 4.1.9. Fortsetzung des Beispiels 4.1.1.
$x \mapsto Ax$ ist selbstadjungiert, wenn $A^* = A$.

Proposition 4.1.10. *U, V, W, endlich-dimensionale VR, $F, G : V \to W$, $H : U \to V$ linear, $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} (F + G)^* &= F^* + G^* \\ (\alpha F)^* &= \overline{\alpha} F^* \\ (F \circ H)^* &= H^* \circ F^* \\ (F^*)^* &= F \end{aligned}$$

4.2 Unitäre Abbildungen

In diesem Abschnitt seien alle IP positiv definit.

Definition 4.2.1. Seien V, W IPR, $F : V \to W$. F heißt *unitär*, wenn gilt:

$$\langle F(x), F(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V \quad \forall x, y \in V.$$

Bemerkung 4.2.2. Unitäre Abbildungen sind längen- und winkeltreu.

Lemma 4.2.3. *Sei V ein endlich dimensionaler IPR und $F : V \to V$ linear. Dann ist F genau dann unitär, wenn $F^* \circ F = \mathrm{id}_V$.*

Beweis. Da V endlich-dimensional ist, gibt es die adjungierte Abbildung F^*.

F ist unitär $\iff$ Für alle x, $y \in V$ gilt $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ $\iff$ Für alle x, $y \in V$ gilt $\langle (F^* \circ F)(x), y \rangle = \langle x, y \rangle$ $\iff$ Für alle $x \in V$ gilt $(F^* \circ F)(x) = x$ $\iff$ $F^* \circ F = \mathrm{id}$.

Im vorletzten Schritt wurde Lemma 4.1.4 benutzt. ∎

Proposition 4.2.4. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-IP. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$x \mapsto Ax$ ist unitär.*
2. *$A^* A = I$.*
3. *Die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem.*

Beweis. (1)$\Leftrightarrow$(2) folgt sofort aus Lemma 4.2.3 und Beispiel 4.1.1.

Im folgenden Beweis wird die i-te Zeile (bzw. Spalte) der Matrix A mit $A(i,:)$ (bzw. $A(:,i)$) bezeichnet.

(2)$\Leftrightarrow$(3) $A^*A = I$ gilt genau dann, wenn

$$\langle A(:,i), A(:,j)\rangle = (A(:,i))^* \cdot A(:,j) = A^*(i,:) \cdot A(:,j) = (A^*A)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

□

Definition 4.2.5. Eine Matrix, die eine unitäre Abbildung bezüglich des Standard-IP vermittelt, heißt *unitäre* Matrix (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. *orthogonale* Matrix (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Satz 4.2. *Sei V ein endlich-dimensionaler IPR. Dann bildet die Menge*

$$\mathrm{U}(V) := \{F : V \to V \;:\; F \text{ ist unitär}\}$$

zusammen mit der Hintereinanderausführung von Funktionen eine Gruppe („unitäre Gruppe von V“).

Beweis.

1. Seien $F, G \in \mathrm{U}(V)$. $H := F \circ G$.

$$\begin{aligned} \langle H(x), H(y)\rangle &= \langle F(G(x)), F(G(y))\rangle \\ &\overset{F \text{ unitär}}{=} \langle G(x), G(y)\rangle \overset{G \text{ unitär}}{=} \langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

   Daraus folgt, dass H unitär ist.

2. Sei $F \in \mathrm{U}(V)$. Behauptung: F ist injektiv. Sei $x \in \operatorname{Ker} F$, dann gilt

$$0 = \langle F(x), F(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

   Somit ist $x = 0$ und damit gilt $\operatorname{Ker}(F) = 0$. Daraus folgt wiederum, dass F ist injektiv ist.

3. Aufgrund der Dimensionsformel folgt, dass F surjektiv und somit bijektiv ist. Deshalb existiert auch die Funktion F^{-1}.

4. Aus $F^* \circ F = \mathrm{id}_V = F^{-1} \circ F$ folgt durch Multiplikation von F^{-1} von rechts, dass $F^* = F^{-1}$. Daraus folgt $\mathrm{id}_V = F \circ F^{-1} = F \circ F^* = (F^*)^* \circ F^*$, also ist $F^{-1} = F^*$ unitär.

□

Bemerkung 4.2.6. In einer orthogonalen $(n \times n)$-Matrix sind nach dem letzten Punkt des Beweises von Satz 4.2 auch die Zeilen orthogonal.

Definition 4.2.7. Die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ des $\mathbb{C}^n$ wird mit U_n (*unitäre Gruppe der Ordnung* n), jene $\mathrm{U}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n$ wird mit O_n (*orthogonale Gruppe der Ordnung* n) bezeichnet. Die *spezielle unitäre* bzw. *orthogonale Gruppe der Ordnung* n sind

$$\begin{aligned} SU_n &:= \{F \in U_n : \det F = 1\}, \\ SO_n &:= \{F \in O_n : \det F = 1\} \end{aligned}$$

Was sind orthogonale Matrizen im $\mathbb{R}^2$? Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

somit kommt man zu folgendem Ansatz:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1, \\ c^2 + d^2 &= 1, \\ ac + bd &= 0, \end{aligned}$$

$$a = \cos(\phi), \qquad c = \cos(\psi),$$
$$b = \sin(\phi), \qquad d = \sin(\psi),$$

$$\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\psi) = 0,$$
$$\cos(\phi - \psi) = 0.$$

Somit muss gelten $\phi - \psi = \frac{2k+1}{2}\pi$, und schließlich $\psi = \phi - \frac{2k+1}{2}\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos(\psi) = \cos(\phi) \cdot 0 + \sin(\phi) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}_{=:s\in\{\pm 1\}}$$
$$\cos(\psi) = s \cdot \sin(\phi)$$
$$\sin(\psi) = \sin(\phi) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) - \cos(\phi) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}_{s}$$
$$\sin(\psi) = -s \cdot \cos(\phi)$$

Somit ergibt sich für die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & s \cdot \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -s \cdot \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s \end{pmatrix}$$

1. Fall: $(s = -1)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

2. Fall: $(s = 1)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die vordere Matrix entspricht hierbei einer Drehmatrix um den Winkel ϕ (im mathematisch positiven Sinn). Sie ist Element der SO_2. Die hintere Matrix hingegen entspricht einer Spiegelung an der x-Achse.

Satz 4.3. *Orthogonale Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ sind Zusammensetzungen von Drehungen und Spiegelungen.*

Proposition 4.2.8. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wobei U und V unitär sind. Dann gilt*

1. $\|UA\|_2 = \|A\|_2$.
2. $\|UA\|_F = \|A\|_F$
3. $\|AV\|_2 = \|A\|_2$
4. $\|AV\|_F = \|A\|_F$

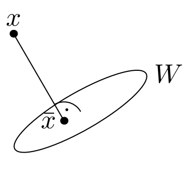
Beweis. als Übung. □

4.3 Projektionen

In diesem Abschnitt ist V ein IPR mit positiv definitem IP und W ein Teilraum von V.

Definition 4.3.1. Seien $x, \overline{x} \in V$. $\overline{x}$ heißt Projektion von x auf W, falls:

- $\overline{x} \in W$,
- $x - \overline{x} \in W^{\perp}$.



Proposition 4.3.2. *Sei $x \in V$. Dann gibt es höchstens eine Projektion von x auf W.*

Beweis. Seien y, z Projektionen von x auf W.

$$\begin{aligned} x - y &= y' \in W^{\perp} \\ x - z &= z' \in W^{\perp} \\ y + y' &= x = z + z' \\ \underbrace{y - z}_{\in W} &= z' - y' \in W^{\perp} \end{aligned}$$

daraus folgt wegen Proposition 3.4.5 $y - z = 0$ und schließlich $y = z$. □

Satz 4.4. *Sei $x \in V$ und $\overline{x}$ eine Projektion von x auf W. Dann gilt:*

$$\|x - \overline{x}\| = \min\{\|x - w\| \,:\, w \in W\}.$$

Beweis.

$$\|x - w\|^2 = \|\underbrace{x - \overline{x}}_{\in W^{\perp}}\|^2 + \|\underbrace{\overline{x} - w}_{\in W}\|^2 \quad \text{(Pythagoras)},$$

somit ist $\|x - w\| \geq \|x - \overline{x}\|$, also ist $\|x - \overline{x}\|$ der kürzeste Abstand. □

Gibt es immer eine Projektion?
Sei $x \in V$, und $P_W(x)$ die gesuchte Projektion mit $P_W : V \to W$

$$\begin{aligned} \langle x - P_W(x), w \rangle &= 0 \quad \forall w \in W, \forall x \in V \\ \langle x, w \rangle_V &= \langle P_W(x), w \rangle_W \quad \forall x \in V, \forall w \in W \\ \langle x, \mathrm{i}(w) \rangle_V &= \langle P_W(x), w \rangle_W \end{aligned}$$

mit $\mathrm{i} : W \to V$ und $w \mapsto w$
Also ist $P_W : V \to W$ adjungierte Abbildung zu i. Diese existiert auf jeden Fall, falls W endlich-dimensional ist, da wenn $\{w^1, \ldots, w^d\}$ eine Basis von W ist, gilt nach Satz 4.1

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j w^j \text{ für } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = (\langle w^i, w^j \rangle)^{-1}_{1 \leq i,j \leq d} \begin{pmatrix} \langle w^1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle w^d, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Satz 4.5. *Sei W endlich-dimensional. Dann gibt es genau eine Abbildung $P_W : V \to V$, sodass $P_W(x)$ die Projektion von x auf W ist ($\forall x \in V$). Wenn $\{w^1, \ldots, w^d\}$ eine Basis von W ist, so ist*

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j w^j \textit{ für } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = (\langle w^i, w^j \rangle)^{-1}_{1 \leq i,j \leq d} \begin{pmatrix} \langle w^1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle w^d, x \rangle \end{pmatrix}.$$

Beweis. Siehe vorhergehende Überlegungen. □

Korollar 4.3.3. *Sei $V = \mathbb{K}^n$ und $\{w^1, \ldots, w^d\}$ eine Basis von W und sei $A := (w^1 \ldots w^d)$. Dann gilt*

$$P_W(x) = A \cdot (A^* A)^{-1} A^* x.$$

Beweis.

$$P_W(x) = Ac, \text{ wobei } c = (A^* A)^{-1} A^* x.$$

□

Korollar 4.3.4. *Sei $\{w^1, \dots, w^d\}$ eine Orthonormalbasis von W. Dann gilt*

$$P_W(x) = \sum_{j=1}^{d} \langle w^j, x \rangle \cdot w^j.$$

Beweis. Durch Einsetzen von $(\langle w^i, w^j \rangle)_{1 \le i,j \le d} = I$ und $c_j = \langle w^j, x \rangle$ erhält man direkt obiges Ergebnis. □

Beispiel 4.3.5. $V = \mathcal{C}[-\pi, \pi], W_N = \text{span}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : -N \le n \le N\}$. Sei $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$. Suche die Projektion von f auf W_N, also den kürzesten Abstand zwischen f und W_N, beziehungsweise die beste Approximation von f durch Funktionen in W_N.

$$P_W(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$$

Die c_n heißen Fourierkoeffizienten von f.

Korollar 4.3.6. *Falls W endlich-dimensional ist, so gilt $V = W \oplus W^\perp$, $P_{W^\perp}$ existiert und es gilt $P_W + P_{W^\perp} = \mathrm{id}_V$. Falls zusätzlich $\dim V < \infty$, dann gilt*

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W.$$

Beweis. Sei $x \in V$. Dann gilt:

$$x = \underbrace{P_W(x)}_{\in W} + \underbrace{(x - P_W(x))}_{\in W^\perp}.$$

□

Korollar 4.3.7. *Seien $x, y \in V$ mit $\|y\| = 1$. Dann gilt:*

$$P_{\text{span}\{y\}}(x) = \langle y, x \rangle \cdot y,$$

insbesondere

$$\|P_{\text{span}\{y\}}(x)\| = |\langle y, x \rangle|.$$

Beweis. Siehe Korollar 4.3.4. □

Wie bekommt man eine Orthonormalbasis? Gibt es so etwas immer?

Korollar 4.3.8 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Sei $\{v^1, \dots, v^d\}$ eine Basis von W, dann definiere:*

$$w^k := v^k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w^j, v^k \rangle}{\langle w^j, w^j \rangle} w^j \quad k = 1, \dots, d.$$

Die Vektoren $w^1, \dots, w^d$ bilden eine Orthogonalbasis von W.

Beweis. Behauptung: $\{w^1, \dots, w^k\}$ ist Orthogonalbasis von $\text{span}\{v^1, \dots, v^k\}$.
$k = 1:$

$$w^1 = v^1.$$

$(k-1) \to k:$

$$z^k := \frac{1}{\|w^k\|} w^k,$$

$$
\begin{aligned}
w^k &= v^k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle z^j, v^k \rangle z^j, \\
&= v^k - P_{\operatorname{span}\{w^1,\dots,w^{k-1}\}}(v^k),
\end{aligned}
$$

daraus folgt: $w^k \in \operatorname{span}\{w^1, \dots, w^{k-1}\}^\perp$. Somit folgt wiederum, dass $w^1, \dots, w^k$ ein Orthogonalsystem ist. Außerdem gilt

$$
\operatorname{span}\{w^1, \dots, w^k\} = \operatorname{span}\{w^1, \dots, w^{k-1}, v^k\} = \operatorname{span}\{v^1, \dots, v^{k-1}, v^k\}.
$$

□

Bemerkung 4.3.9. Das Gram-Schmidt-Verfahren ist numerisch besonders empfindlich. Auslöschung kann auftreten, wenn v^{k+1} „fast“ aus $\operatorname{span}\{v^1, \dots, v^k\}$ ist. (`bsp_2_1.m`, `alg_2_1.m`)

Satz 4.6 (Satz über Projektionsabbildungen)**.** *Sei $P : V \to V$ linear mit* $\operatorname{Im}(P) = W$*. Dann ist P genau dann gleich der Projektionsabbildung P_W, wenn:*

- $P^2 = P$ *„P ist idempotent“,*
- $P^* = P$ *„P ist selbstadjungiert“.*

Beweis.

1. Für alle $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$
\begin{aligned}
\langle P_W(x), y \rangle &= \langle x, y \rangle, \qquad (4.1)\\
\langle {P_W}^2(x), y \rangle &= \langle P_W(P_W(x)), y \rangle \\
&= \langle P_W(x), y \rangle,
\end{aligned}
$$

   somit folgt ${P_W}^2(x) = P_W(x)$ für alle $x \in V$ und es gilt: ${P_W}^2 = P_W$.

2. Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\langle {P_W}^*(x), y \rangle &= \langle x, \underbrace{P_W(y)}_{\in W} \rangle \\
= \langle P_W(x), P_W(y) \rangle &\overset{(4.1)}{=} \langle P_W(x), y \rangle
\end{aligned}
$$

   somit folgt: $P_W(x) = {P_W}^*(x)$ für alle $x \in V$ und somit ${P_W}^* = P_W$.

3. Sei P eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften. Für alle $x \in V$ gilt: $P(x) \in W$. Nun ist zu zeigen

$$
x - P(x) \in W^\perp \Leftrightarrow \langle x - P(x), y \rangle = 0 \, \forall y \in W \Leftrightarrow \langle P(x), y \rangle = \langle x, y \rangle \forall y \in W.
$$

   Für alle $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$
\langle P(x), y \rangle = \langle x, P^*(y) \rangle = \langle x, P(y) \rangle.
$$

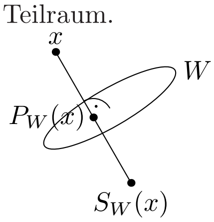
   Schreibe nun $y = P(z)$ für passendes $z \in V$, und erhalte

$$
\langle x, P^2(z) \rangle = \langle x, P(z) \rangle = \langle x, y \rangle.
$$

□

4.4 Spiegelungen

V sei ein IPR mit positiv definitem IP und W sei ein endlich-dimensionaler Teilraum.



Definition 4.4.1. Die Abbildung $S_W : V \to V$ mit

$$S_W(x) = 2P_W(x) - x,$$

heißt Spiegelung an W.

Satz 4.7. *Sei $F : V \to V$ linear. Dann ist F genau dann die Spiegelung S_W, wenn*

- *F ist unitär,*
- *$F^2 = \mathrm{id}$ (F ist involutorisch),*
- *$W = \{x \in V \,:\, F(x) = x\}$ (W ist der invariante Unterraum von F).*

Beweis. 1. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle S_W(x), S_W(y)\rangle &= \langle 2P_W(x) - x, 2P_W(y) - y\rangle \\ &= 4\langle P_W(x), P_W(y)\rangle - 2\langle x, P_W(y)\rangle - 2\langle P_W(x), y\rangle + \langle x, y\rangle \\ &= 2\langle P_W(x), y\rangle + 2\langle x, P_W(y)\rangle - 2\langle x, P_W(y)\rangle - 2\langle P_W(x), y\rangle + \langle x, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

da für $v \in V$ und $w \in W$ $\langle v, w\rangle = \langle P_W(v), w\rangle$.

2.

$$\begin{aligned}S_W(S_W(x)) &= S_W(2P_W(x) - x) = 2P_W(2P_W(x) - x) - 2P_W(x) + x \\ &= 4\underbrace{P_W(P_W(x))}_{P_W(x)} - 2P_W(x) - 2P_W(x) + x = x.\end{aligned}$$

Somit ist S_W^2 die identische Abbildung.

3. Sei F eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften. Sei $G(x) = \frac{F(x)+x}{2}$. Zu zeigen ist nun, dass $G = P_W$ gilt. Zeige zunächst, dass $G(x) \in W$, und dann $x - G(x) \in W^\perp$.

- $$F(G(x)) = F\left(\frac{F(x) + x}{2}\right) = \frac{1}{2}(F^2(x) + F(x)) = \frac{1}{2}(x + F(x)) = G(x),$$

  und daraus folgt $G(x) \in W$.
- Sei $w \in W$,

  $$\begin{aligned}\langle w, x - G(x)\rangle &= \left\langle w, x - \frac{F(x) + x}{2}\right\rangle = \left\langle w, \frac{x - F(x)}{2}\right\rangle = \\ &= \left\langle w, \frac{x}{2}\right\rangle - \left\langle F(w), F\left(\frac{x}{2}\right)\right\rangle = \left\langle w, \frac{x}{2}\right\rangle - \left\langle w, \frac{x}{2}\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

und daraus folgt $G(x) = P_W(x)$ für alle x.

□

Wir möchten nun für gegebene x und y eine Hyperebene

$$W = \{x : \langle x, w\rangle = 0\} = \mathrm{span}\{w\}^\perp$$

finden, sodass $y = S_W(x)$. Dabei soll w normiert sein, d.h. $\|w\| = 1$.

$$\begin{aligned}S_W(x) &= 2P_W(x) - x = 2(x - P_{\mathrm{span}\{w\}}(x)) - x \\ &= 2x - 2(\langle w, x\rangle w) - x = x - 2\langle w, x\rangle w.\end{aligned}$$

Proposition 4.4.2. *Sei V endlich-dimensional, $w \in V$ mit $\|w\| = 1$. Dann gilt*

$$S_{\operatorname{span}\{w\}^\perp} = x - 2\langle w, x\rangle w.$$

Wir suchen nun ein w, sodass

$$S_{\operatorname{span}\{w\}^\perp}(x) = y.$$

Brauche $\|x\| = \|y\|$, da S längentreu ist. $y - x$ muss auf Hyperebene normal stehen, somit muss $w = \alpha(y - x)$ für passendes $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten und somit

$$1 = \|w\| = |\alpha| \cdot \|y - x\| \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\|y - x\|}.$$

Da die Multiplikation von w mit einem Skalar die Hyperebene nicht ändert, kann es nur mit $w = \frac{y-x}{\|y-x\|}$ funktioneren.
Probe:

$$\begin{aligned} y - \left(x - 2\left\langle \frac{y-x}{\|y-x\|}, x\right\rangle \frac{y-x}{\|y-x\|}\right) &= (y-x) + \frac{2}{\langle y-x, y-x\rangle}\langle y-x, x\rangle(y-x) = \\ &= \left(1 + 2\frac{\langle y-x, x\rangle}{\langle y-x, y-x\rangle}\right)(y-x). \end{aligned}$$

Hoffnung: $\langle y - x, y - x\rangle = -2\langle y - x, x\rangle$, dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \langle y-x, 2x + (y-x)\rangle \\ &= \langle y-x, x+y\rangle = \langle y-x, y+x\rangle \\ &= \langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,x\rangle \\ &= 2\ \mathrm{Im}\langle y,x\rangle. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die weitere Forderung $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.4.3. *Seien $x, y \in V$, $\|x\| = \|y\|$, $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Setze: $w = \frac{y-x}{\|y-x\|}$. Dann gilt*

$$S_{\operatorname{span}\{w\}^\perp}(x) = y.$$

Beweis. Siehe vorhergehende Überlegungen. □

4.5 Dualraum

Definition 4.5.1. Sei V ein K-Vektorraum, dann heißt $V^* := \{f : V \to K, f \text{ linear}\}$ der Dualraum von V. Seine Elemente heißen „lineare Funktionale“.

Bemerkung 4.5.2. V^* ist ein K-Vektorraum.

Proposition 4.5.3. *Ist V endlich-dimensional, dann ist auch V^* endlich-dimensional und es gilt $\dim V^* = \dim V$. Wenn $\{v^1, \dots, v^d\}$ eine Basis von V ist, so ist eine Basis von V^* durch $\{f^1, \dots, f^d\}$ gegeben, wobei*

$$f^i(v^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

die „duale Basis“ ist.

Beweis.

$$V^* \cong \{f : K^d \to K \text{ linear}\} \cong K^{1\times d} \cong K^d,$$

und somit gilt $\dim V^* = d = \dim V$. Die Basis $(e^i)^t, i = 1, \dots, d$, des $K^{1\times d}$ entspricht dabei genau den Abbildungen f_i aus der Proposition. □

4.5.1 Zusammenhang zwischen Dualraum und inneren Produkten

Sei V ein endlich-dimensionaler IPR mit p.d. IP. Für ein $w \in V$ ist $\langle w, \cdot \rangle : V \to \mathbb{K}, v \mapsto \langle w, v \rangle$ lineare Abbildung.
$\Phi : V \to V^*, w \mapsto \langle w, \cdot \rangle$.
Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für alle $v, w, w' \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha w + \beta w')(v) &= \langle \alpha w + \beta w', v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle + \beta \langle w', v \rangle \\ &= (\alpha \Phi(w) + \beta \Phi(w'))(v), \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass Φ eine lineare Abbildung: $V \to V^*$ ist. Behaupte nun Φ sei injektiv, dies ist aber dasselbe wie $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$.

Beweis. Sei $w \in V$ mit $\Phi(w) = 0$. Daraus folgt $\langle w, v \rangle = 0$ für alle v und somit ist $w = 0$. Aufgrund der Dimensionsformel ergibt sich nun, dass Φ surjektiv ist, und somit ist Φ natürlich auch ein Vektorraumisomorphismus. $\square$

Satz 4.8. *Sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum (mit p.d. IP). Dann ist die Abbildung $\Phi : V \to V^*, w \mapsto \langle w, \cdot \rangle$ ein Vektorraumisomorphismus.*

Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt, dann ist Φ bijektiv und antilinear.

Kapitel 5

Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme, QR-Zerlegung

5.1 QR-Zerlegung

Satz 5.1 (reduzierte QR-Zerlegung)**.** *Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und* $\operatorname{rank} A = k$*. Dann gibt es eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m\times k}$, sowie eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{k\times n}$, sodass*

$$A = QR,$$

mit:

- *Spaltenraum von A = Spaltenraum von Q,*
- $\operatorname{rank} R = k$*,*
- *Falls $k = n$, so gibt r_{ii} den Abstand von a^i zu* $\operatorname{span}\{a^1, \ldots, a^{i-1}\}$ *an.*

Beweis. Wende Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren $a^1, \ldots, a^n$ an. Erhalte somit Vektoren $w^1, \ldots, w^n$, von denen manche 0 sind. Der Rest bildet ein Orthogonalsystem.

$$A = (a^1 \ldots a^n) = \underbrace{(w^1 \ldots w^n)}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{S}$$

S ist eine obere Dreiecksmatrix der Dimension $n \times n$, die Zeilen sind linear unabhängig. Die Spalten von P sind entweder 0 oder orthogonal. Streiche die 0-Spalten aus P und zugehörige Zeilen aus S. Erhalte somit neue Matrizen $\tilde{P}$ und $\tilde{S}$. Die Spalten von $\tilde{P}$ bilden ein Orthogonalsystem, die Zeilen von $\tilde{S}$ sind l.u.. $\tilde{S}$ bleibt eine obere Dreiecksmatrix und es gilt $A = \tilde{P}\tilde{S}$. Dividiere jede Spalte von $\tilde{P}$ durch ihre Norm, und multipliziere die zugehörige Zeile von $\tilde{S}$ mit eben dieser. Erhalte Matrizen Q, R, sodass gilt $A = QR$. Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem, somit ist Q unitär. R ist eine obere Dreiecksmatrix, die Zeilen sind l.u.. Außerdem gilt Spaltenraum$(A) \subseteq$ Spaltenraum(Q).

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} A &= \{x \in \mathbb{K}^n \,:\, Ax = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{K}^n \,:\, Q(Rx) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{K}^n \,:\, Rx = 0\} \\ &= \operatorname{Ker} R. \end{aligned}$$

$$n-k = n - \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} R = n - \text{Anzahl der Zeilen von } R$$

Somit passen die Größen der Matrizen. Es gilt $\operatorname{span}\{a^1, \ldots, a^n\} \subseteq$ Spaltenraum von Q und

$$\dim(\text{Spaltenraum}(Q)) = \text{Anzahl der Spalten von } Q = k.$$

In obiger Inklusion gilt somit Dimensionsgleichheit und somit Gleichheit. Falls $k = n$ treten keine Streichungen auf, daher:

$$r_{ii} = \|w^i\| = \|a^i - P_{\operatorname{span}\{a^1,\ldots,a^{i-1}\}}(a^i)\|$$

und dies ist der Normalabstand zwischen a^i und $\operatorname{span}\{a^1, \ldots, a^{i-1}\}$. □

Bemerkung 5.1.1. Die $(n \times n)$-Matrix H_n mit den Einträgen

$$H_n(i,j) = \frac{1}{i+j-1},$$

heißt n-te Hilbertmatrix. Sie ist für ihre schlechte Kondition berühmt.

(`bsp_2_2.m`, `alg_2_2.m`)

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $m > n$. Dann gibt es nach Satz 5.1 $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{m\times k}, \tilde{R} \in \mathbb{K}^{k\times n}, \tilde{Q}$ unitär, $\tilde{R}$ obere Dreiecksmatrix, sodass gilt

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \text{ONB} \\ \tilde{Q} & \vdots & \text{von} \\ & \vdots & \text{Spaltenraum}(A)^{\perp} \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ unitär ist.

Satz 5.2 (Volle QR-Zerlegung)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann gibt es eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{m\times n}$, sodass $A = QR$. Falls* $\operatorname{rank}(A) = n$*, dann wird der Spaltenraum(A) durch die ersten n Spalten von Q aufgespannt, und diese bilden eine Orthonormalbasis vom Spaltenraum(A).*

5.2 Überbestimmte Gleichungssysteme

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, m > n, b \in \mathbb{K}^m$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ wird im Allgemeinen keine Lösung haben, suche also geringstes Übel: $\min \|Ax - b\|_2$.

Definition 5.2.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m > n$. Ein $x_0 \in \mathbb{K}^n$ heißt *Lösung des überbestimmten Gleichungssystems $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate,* wenn $\|Ax_0 - b\|_2 = \min\{\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{K}^n\}$.
„Least-Squares-Solution“.

1. Lösungsweg $\|Ax_0 - b\|_2 =$ Normalabstand von b zu $\operatorname{Im}(A)$.

$$Ax_0 = P_{\text{Spaltenraum}(A)}(b) = A(A^*A)^{-1}A^*b$$

falls $\operatorname{rank}(A) = n$, dann ist $x_0 = (A^*A)^{-1}A^*b$ eine eindeutige Lösung, da A vollen Spaltenrang besitzt. Daher ist x_0 Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(\underbrace{A^*A}_{\in\mathbb{K}^{n\times n}})\underbrace{x_0}_{\in\mathbb{K}^n} = \underbrace{A^*b}_{\in\mathbb{K}^n}.$$

Satz 5.3. *(Normalgleichungen). Seien A, b wie in der Definition,* $\operatorname{rank}(A) = n$, *$x_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann ist x_0 genau dann eine „least-squares-solution“ von $Ax = b$, wenn x_0 eine Lösung des quadratischen Gleichungssytems*

$$(A^*A)x_0 = A^*b \qquad \text{„Normalgleichungen“}$$

ist.

Definition 5.2.2. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) = n$. Dann heißt

$$(A^*A)^{-1}A^*$$

die Pseudo-Inverse von A.

Bemerkung 5.2.3. Diese Gleichungssystem ist meist schlecht konditioniert.

Beispiel 5.2.4. (`bsp_2_3.m`) Seien $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ gegeben, und sei $y_k = f(x_k)$ mit

$$f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6e^x + c_7\cos x + c_8\sin x.$$

Offensichtlich ist $f(x)$ linear in den unbekannten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_8$.

$$y_i = c_1 + c_2x_i + c_3{x_i}^2 + c_4{x_i}^3 + c_5{x_i}^4 + c_6e^{x_i} + c_7\cos x_i + c_8\sin x_i,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 & {x_1}^4 & e^{x_1} & \cos x_1 & \sin x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & {x_m}^2 & {x_m}^3 & {x_m}^4 & e^{x_m} & \cos x_m & \sin x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

„Least-Squares-Fitting“

2. Lösungsweg

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, m > n, b \in \mathbb{K}^m$.

$$\begin{aligned} \min_x \|Ax - b\|^2 &= \min_x \|QRx - b\|^2 \quad \text{wobei } A = QR \ldots \text{volle QR-Zerlegung} \\ &= \min_x \|QRx - QQ^*b\| \\ &= \min_x \|Q(Rx - Q^*b)\| \\ &= \min_x \|Rx - Q^*b\|. \end{aligned}$$

Annahme: A hat Rang n. Somit hat auch R Rang n.

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } R_1 \in \mathbb{K}^{n\times n}, 0 \in \mathbb{K}^{m-n\times n},$$

$$Q^*b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c \in \mathbb{K}^n, d \in \mathbb{K}^{m-n},$$

daraus folgt

$$\min_x \|Ax - b\|^2 = \min_x \left\| \begin{pmatrix} R_1x - c \\ -d \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \min_x (\|R_1x - c\|^2 + \underbrace{\| - d\|^2}_{\text{konstant}}) = \| - d\|^2.$$

für ein x mit $R_1x = c$. Da R_1 eine obere Dreiecksmatrix mit Rang n ist, handelt es sich bei $R_1x = c$ um ein $(n \times n)$-lineares Gleichungssystem, das durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden kann.

Satz 5.4. *(Überbestimmte Gleichungssysteme via QR-Zerlegung). Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m > n, \operatorname{rank}(A) = n$. Dann ist $x_0 \in \mathbb{K}^n$ genau dann eine „least-squares-solution“ von $Ax = b$, wenn x_0 die eindeutige Lösung von $R_1x = c$ ist, wobei $A = QR$ (volle QR-Zerlegung), $R_1 = R(1 : n, :), c = (Q^*b)(1 : n)$.*

5.3 Unterbestimmte Gleichungssysteme

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m < n$. Suche kürzeste Lösung, daher $\|x_0\| = \min\limits_x \{\|x\| \;:\; Ax = b\}$. Sei $A^* = QR$ die QR-Zerlegung von A^* mit $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}, R \in \mathbb{K}^{n\times m}$,

$$\min_x \{\|x\| \;:\; Ax = b\} = \min_x \{\|x\| \;:\; R^* \underbrace{Q^* x}_{=:y} = b\}.$$

Da Q^* unitär ist, folgt $\|y\| = \|Q^* x\| = \|x\|$. Somit suchen wir $\min\{\|y\| \;:\; R^* y = b\}$ mit

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R^* = \begin{pmatrix} R_1^* & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

wobei $R_1 \in \mathbb{K}^{m\times m}, y_1 \in \mathbb{K}^m, y_2 \in \mathbb{K}^{n-m}$.

$$R^* y = \begin{pmatrix} R_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = R_1^* y_1 + 0 y_2.$$

Also gilt

$$\min\{\|x\|^2 \;:\; Ax = b\} = \min_{y=(y_1,y_2)^t} \{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \;:\; R_1^* y_1 = b\}.$$

Um dies zu minimieren, wähle $y_2 = 0$. Annahme: $\operatorname{rank} A = m$ (ansonsten können wir erst in Kapitel 10 darauf eingehen), dann hat R_1 ebenfalls Rang m, daher hat

$$R_1^* y_1 = b$$

eine eindeutige Lösung y_1.

Satz 5.5 (Lösung unterbestimmter Gleichungssysteme)**.** *$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, b \in \mathbb{K}^m, m < n, \operatorname{rank} A = m, A^* = QR \ldots$volle QR-Zerlegung, $R_1 = R(1:m,:)$. Dann ist die eindeutige kürzeste Lösung von $Ax = b$ durch $x = Q \cdot (y_1, 0)^t$ gegeben, wobei $y_1 \in \mathbb{K}^m$ die eindeutige Lösung von $R_1^* y_1 = b$ ist.*

Bemerkung 5.3.1. Falls $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, b \in \mathbb{K}^n, A = QR \ldots$volle QR-Zerlegung, so kann man auch das quadratische Gleichungssystem $Ax = b$ lösen:

$$\begin{aligned} QRx &= b, \\ Rx &= Q^* b. \end{aligned}$$

Da R eine obere Dreiecksmatrix ist, kann man das Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen lösen.

Teil III

Eigenwerte

Kapitel 6

Eigenwerte in allgemeinen Körpern

6.1 Motivation

Beispiel 6.1.1. Betrachte die Kurve $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} : 2xy = 1\}$ (vgl. Abbildung 6.1).

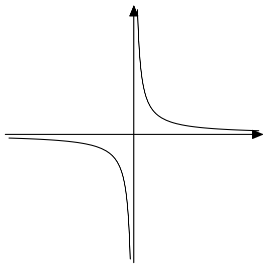


Abbildung 6.1: Hyperbel $y = \frac{1}{2x}$

Hauptformen von Kegelschnitten:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Ellipse}$$

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Hyperbel}$$

$$v^2 = 2pu \qquad \text{Parabel}$$

a, b haben geometrische Bedeutung. Suche Koordinatentransformation, sodass die Kurve in Hauptform übergeht. Setze

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

wobei Q orthogonal ist. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} F(x, y) = 2xy - 1 = (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = \\ = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 = (u, v)Q^* AQ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wäre folgende Darstellung wünschenswert:

$$Q^t AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{„Diagonalisierung von } A\text{“}.$$

Daraus folgt

$$AQ = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $Q = (z^1, z^2)$, dann folgt

$$\begin{aligned} Az^1 &= \lambda_1 z^1, & Az^2 &= \lambda_2 z^2, \\ Az^1 - \lambda_1 I z^1 &= 0, & Az^2 - \lambda_2 I z^2 &= 0, \\ (A - \lambda_1 I) z^1 &= 0, & (A - \lambda_2 I) z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Da Nullspalten in einer orthogonalen Matrix nicht möglich sind, folgt, dass $(A - \lambda_1 I)$ und $(A - \lambda_2 I)$ singulär sein müssen. Für beide λ gilt nun:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \overset{!}{=} 0.$$

Sei nun $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Daraus ergibt sich wiederum

$$\begin{aligned} (A - I) z^1 &= 0, & (A + I) z^2 &= 0, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} z^1 &= 0, & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z^2 &= 0, \\ z^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & z^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

somit ergibt sich:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von Q sind nun normiert und orthogonal, somit ist auch Q orthogonal. Für unsere Funktion folgt nun

$$F(x, y) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 - 1 = u^2 - v^2 - 1.$$

Somit erhalten wir die neue Gleichung $u^2 - v^2 = 1$. Dies entspricht einer Hyperbel in erster Hauptlage mit $a = 1, b = 1$ (vgl. Abbildung 6.2).

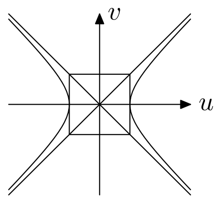


Abbildung 6.2: Hyperbel $u^2 - v^2 = 1$ in erster Hauptlage

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } 45^\circ} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

λ_1, λ_2 sind hierbei die Eigenwerte von A, sie haben geometrische Bedeutung.

Beispiel 6.1.2. Hühner-Füchse Beispiel aus Einleitung.

$$z_{n+1} = Az_n, \qquad z_n = (F_n, H_n)^t,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -k & 1.2 \end{pmatrix}.$$

Suche nun T regulär, sodass

$$\begin{aligned}
T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \\
A &= T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}, \\
z_{n+1} &= T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} z_n, \\
\underbrace{T^{-1} z_{n+1}}_{u_{n+1}} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underbrace{T^{-1} z_{n+1}}_{u_n}.
\end{aligned}$$

Mit $u_n = (x_n, y_n)^t$ ergibt sich nun folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda_1 x_n + 0 y_n, \\
y_{n+1} &= 0 x_n + \lambda_2 y_n,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \lambda_1 x_n, \\
y_{n+1} &= \lambda_2 y_n.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir ein entkoppeltes System. Für x_n, y_n erhalten wir nun explizit

$$\begin{aligned}
x_n &= (\lambda_1)^n x_0, \\
y_n &= (\lambda_2)^n y_0.
\end{aligned}$$

Wenn nun zum Beispiel $|\lambda_1| < 1$ und $|\lambda_2| < 1$, dann geht x_n und y_n gegen 0 und somit geht auch $z_n = Tu_n$ gegen 0. Die Eigenwerte von A geben somit Auskunft über die quantitive Entwicklung.

6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 6.2.1. Sei V ein K-Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Dann heißt $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, falls es ein $x \in V$ mit $x \neq 0$ gibt, sodass

$$F(x) = \lambda x.$$

Ein solches x heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ von F. Die Menge der Eigenwerte von F

$$\sigma(F) = \{\lambda \in K : \lambda \text{ ist EW von } F\}$$

heißt das Spektrum von F.

Beispiel 6.2.2. $A \in K^{n\times n}, \lambda$ ist EW, $x \neq 0$ ist EV, ist äquivalent zu $Ax = \lambda x$.

Beispiel 6.2.3. $A \in K^{n\times n}$ Diagonalmatrix mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

$Ae^i = a_i e^i$. e^i ist EV zum EW a_i.

Beispiel 6.2.4. Siehe Beispiel 6.1.1.
$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ist EV zum EW $+1$ von A,
$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^t$ ist EV zum EW -1 von A.

Beispiel 6.2.5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ beliebig oft stetig differenzierbar}\}$. $F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \mapsto f'$

$$\begin{aligned} F(f) &= \lambda f, \\ f' &= \lambda f, \\ \frac{f'}{f} &= \lambda, \\ (\ln|f|)' &= \lambda, \\ \ln|f| &= \lambda t + \tilde{C}, \\ f &= \underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{C} e^{\lambda t} = Ce^{\lambda t}. \end{aligned}$$

somit ist e^λ Eigenvektor (Eigenfunktion) von $\frac{d}{dt}$ zum EW λ. Daraus folgt $\sigma\left(\frac{d}{dt}\right) = \mathbb{R}$.

Definition 6.2.6. Sei V ein K-Vektorraum, $F : V \to V$ linear, $\lambda \in \sigma(F)$. Dann heißt

$$V_\lambda = \{x \in V : F(x) = \lambda x\}$$

der Eigenraum von F zum EW λ.

Bemerkung 6.2.7. $V_\lambda =$ (Menge der EV zum EW λ) $\cup\{0\}$.

Proposition 6.2.8. *Seien V, F, λ, V_λ wie in Definition 6.2.6. Dann ist V_λ ein Teilraum von V. Genauer gilt:*

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(F - \lambda \operatorname{id}).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} x \in V_\lambda \Leftrightarrow F(x) = \lambda x \Leftrightarrow F(x) - \lambda \operatorname{id}(x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (F - \lambda \operatorname{id})(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(F - \lambda \operatorname{id}). \end{aligned}$$

Ein Kern ist immer ein Teilraum, und somit ist auch V_λ ein Teilraum von V. □

Definition 6.2.9. Seien V, F, λ, V_λ wie in Definition 6.2.6. Die Dimension von V_λ heißt geometrische Vielfachheit von λ.

$$\rho(\lambda) := \dim V_\lambda.$$

Proposition 6.2.10. *Sei V ein K-Vektorraum, $F : V \to V$ linear, $\lambda \in K$.*

$$\lambda \in \sigma(F) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(F - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0\}.$$

Beweis. Siehe Proposition 6.2.8. □

6.3 Charakteristisches Polynom von Matrizen

$A \in K^{n\times n}, \lambda \in K$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ singulär} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Definition 6.3.1. Sei $A \in K^{n\times n}, t$ eine Unbestimmte. Dann definiere das charakteristische Polynom

$$p_A(t) := \det(A - tI)$$

von A.

Bemerkung 6.3.2. $\lambda \in K$ ist genau dann EW von A, wenn λ eine Nullstelle von $p_A(t)$ ist.

Wie sieht charakteristisches Polynom aus?

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} - t\delta_{i,\sigma(i)})$$

wobei $\delta_{i,j} = 1$ wenn $i = j$ und sonst 0 ist. $p_A(t)$ ist eine Summe von Polynomen in t vom Grad $\leq n$.

$$p_A(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma=\mathrm{id}}}^{n} (a_{ii} - t) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} - t\delta_{i,\sigma(i)}),$$

wenn $\sigma \neq \mathrm{id} : \exists i : \sigma(i) \neq i$. Für $j = \sigma(i)$ gilt $\sigma(j) \neq \sigma(i) = j$ daraus folgt nun, dass $\sigma(i) \neq i, \sigma(j) \neq j$ für $i \neq j$ gilt. Somit folgt

$$\deg \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} - t\delta_{i,\sigma(i)}) \leq n - 2.$$

Für $p_A(t)$ gilt nun

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})}_{=:\mathrm{tr}(A)} t^{n-1} + (\text{Terme vom Grad} \leq n-2).$$

$\mathrm{tr}(A)$ wird die „Spur von A" genannt. Für $p_A(t)$ gilt nun

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) t^{n-1} + (\text{Terme von Grad} \leq n-2 \text{ und } > 0) + C,$$

wobei

$$C = p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A).$$

Proposition 6.3.3. *Sei $A \in K^{n\times n}, p_A$ das charakteristische Polynom von A. Dann ist $p_A(t)$ ein Polynom vom Grad n in t, es hat die Gestalt*

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) t^{n-1} + \ldots + \det A$$

wobei $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Beweis. siehe vorhergehende Überlegungen. □

Erwartung: A hat n Eigenwerte.

Definition 6.3.4. Sei $p(t)$ ein Polynom in t mit Koeffizienten aus K und $a \in K$. Die Vielfachheit von a als Nullstelle von $p(t)$ ist das maximale $m \in \mathbb{N}_0$, sodass es ein Polynom $q(t)$ gibt, sodass $p(t) = (t - a)^m q(t)$.

Definition 6.3.5. Sei $A \in K^{n\times n}, \lambda \in \sigma(A)$. Die algebraische Vielfachheit $\mu(\lambda) = \mu_A(\lambda)$ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $p_A(t)$.

Satz 6.1. *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist $\leq n$ bzw. gleich n, falls $p_A(t)$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte.*

Bemerkung 6.3.6.

- Falls $K = \mathbb{C}$, zerfällt $p_A(t)$ jedenfalls in Linearfaktoren (Hauptsatz der Algebra).
- Falls $K = \mathbb{R}$, kann es durchaus zu Problemen kommen.

Proposition 6.3.7. *Sei $A \in K^{n\times n}$ und das charakteristische Polynom von A zerfalle über K in Linearfaktoren. Die Eigenwerte von A seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (entsprechend der algebraischen Vielfachheiten wiederholt). Dann gilt*

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n, \\ \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \end{aligned}$$

Beweis. als Übung. □

Beispiel 6.3.8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sigma(A)$? Vielfachheiten der EW, EV?

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det(A - tI) = \\ &= \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)\begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 4-t \end{vmatrix} = \\ &= (2-t)((1-t)(4-t)+2) = (2-t)(t^2-5t+6) = \\ &= (2-t)(t-2)(t-3). \end{aligned}$$

Somit ist $\sigma(A) = \{2, 3\}$, wobei $\mu(2) = 2, \mu(3) = 1$.
$\lambda = 3$

$$Ax = 3x$$
$$(A - 3I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0,$$

somit gilt $z = 2t, y = -t, x = -t$, oder anders geschrieben

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} t.$$

Somit ist $V_3 = \operatorname{span}\{(-1, -1, 2)^t\}, \rho(3) = 1$.
$\lambda = 2$

$$(A - 2I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist somit $x = s, y = 0, z = 0$ oder $x = (1, 0, 0)^t s$. Daraus ergibt sich $V_2 = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^t\}$, $\rho(2) = 1$.

Beispiel 6.3.9.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ 2 & -1 & 1-t \end{vmatrix} &= (1-t)\begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ 2 & -t \end{vmatrix} = \\ &= (1-t)(t^2-3t+2) = (1-t)(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\sigma(A) = \{1, 2\}, \mu(1) = 2, \mu(2) = 1$.
$\lambda = 2$

$$\begin{aligned} Ax &= 2x \\ (A - 2I)x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0,$$

somit gilt $z = t, y = t, x = t$, oder anders geschrieben

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Somit ist $V_2 = \operatorname{span}\{(1,1,1)^t\}, \rho(2) = 1$.
$\lambda = 1$

$$\begin{aligned} Ax &= x \\ (A - I)x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0,$$

somit gilt $z = s, y = t, x = \frac{t}{2}$, oder anders geschrieben

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s.$$

Somit ist $V_1 = \operatorname{span}\{(1/2,1,0)^t, (0,0,1)^t\}, \rho(1) = 2$.

Beispiel 6.3.10.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$p_A(t) = \begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ 5 & -3-t \end{pmatrix} = -(9-t^2) + 10 = 1 + t^2.$$

Diese reelle Matrix hat zwei rein imaginäre EW.

Proposition 6.3.11. *Seien $A \in K^{n\times n}, T \in K^{n\times n}$ regulär, $c \in K, \lambda \in \sigma(A)$.*

1. $\lambda \in \sigma(A^t)$.
2. $c\lambda \in \sigma(cA)$.

3. $\lambda^m \in \sigma(A^m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$.
4. *Falls A regulär:* $0 \notin \sigma(A)$.
5. $\lambda + c \in \sigma(A + cI)$.
6. *Wenn A regulär:* $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$.
7. *Wenn x EV zum EW λ ist, gilt:*
$$\lambda \in \sigma(T^{-1}AT).$$
$T^{-1}x$ ist zugehöriger EV.
8. *Wenn $A^2 = A$, folgt $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$.*
9. *$\exists p : A^p = 0$ (A nilpodent), dann folgt $\sigma(A) = \{0\}$.*
10. *Ist A eine Dreiecksmatrix, dann gilt $\sigma(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.*

Beweis von 3. $Ax = \lambda x$. Behauptung: $A^m x = \lambda^m x$.
$m \to m + 1$
$$A^{m+1}x = A(A^m)x = A(\lambda^m x) = \lambda^m(Ax) = \lambda^m \lambda x = \lambda^{m+1}x.$$
□

Beweis von 7. Setze $B = T^{-1}AT$.
$$B(T^{-1}x) = T^{-1}A(TT^{-1})x = T^{-1}(Ax) = T^{-1}(\lambda x) = \lambda(T^{-1}x).$$
□

Beweis von 8. $Ax = \lambda x$
$$\lambda^2 x = A^2 x = Ax = \lambda x$$
$$(\lambda^2 - \lambda)x = 0$$
Da $x \neq 0$, folgt $\lambda^2 - \lambda = 0$ und somit $\lambda \in \{0, 1\}$. □

6.4 Charakteristisches Polynom linearer Abbildungen

Sei V ein n-dimensionaler K-VR, $F : V \to V$ linear. Sei $A = \{v^1, \dots, v^n\}$ eine Basis von V. Dann kann F durch eine Matrix M dargestellt werden.

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{x \mapsto Mx} & K^n \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_A} \\ V & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

Dabei ist Φ_A die Koordinatenabbildung bezüglich A. Was passiert bei Basiswechsel auf Basis $B = \{w^1, \dots, w^n\}$?

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \xrightarrow{T} & K^n & \xrightarrow{S} & K^n \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_B} \\ V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V \end{array}$$

In der j-ten Spalte von T stehen die Koordinaten von w^j bezüglich der Basis A, also
$$w^j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v^i.$$

Da $ST = I$ gilt, folgt $S = T^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_B"] & K^n \arrow[r, "M", "x \mapsto Mx"'] \arrow[d, "\Phi_A"] & K^n \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "\Phi_A"] & K^n \arrow[d, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \arrow[r, "F"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V
\end{tikzcd}$$

Die Matrixdarstellung von F bezüglich der neuen Basis B ist durch $T^{-1}MT$ gegeben.

Proposition 6.4.1. *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $F : V \to V$ linear, $\{v^1, \dots, v^n\}$ bzw. $\{w^1, \dots, w^n\}$ Basen von V. Ist die Matrixdarstellung von F bezüglich $\{v^1, \dots, v^n\}$ durch M gegeben, so ist die Matrixdarstellung von F bezüglich $\{w^1, \dots, w^n\}$ durch $T^{-1}MT$ gegeben, wobei $w^j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} v^i$ den Basiswechsel beschreibt.*

Definition 6.4.2. Seien $A, B \in K^{n \times n}$. A und B heißen ähnlich, wenn es ein $T \in K^{n \times n}$ regulär gibt, sodass $B = T^{-1}AT$.

Bemerkung 6.4.3. Eine lineare Abbildung wird bezüglich verschiedener Basen durch ähnliche Matrizen beschreiben.

Proposition 6.4.4. *Seien $A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich. Dann gilt $p_A(t) = p_B(t)$.*

Beweis. Sei $B = T^{-1}AT$.

$$\begin{aligned}
p_B(t) &= \det(T^{-1}AT - tI) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}tT) = \det(T^{-1}(A - tI)T) \\
&= \det(T^{-1})\det(A - tI)\det(T) = \det(A - tI) = p_A(t).
\end{aligned}$$

□

Definition 6.4.5.

1. Sei V endlich-dimensional, $F : V \to V$ linear, A eine Matrixdarstellung von F bezüglich einer beliebigen Basis, dann definiere das charakteristische Polynom von F als
$$p_F(t) = p_A(t).$$
2. Für $\lambda \in \sigma(F)$ ist die algebraische Vielfachheit $\mu(\lambda)$ durch die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $p_F(t)$ definiert.

Bemerkung 6.4.6. Durch obige Propositionen wird diese Definition überhaupt erst sinnvoll („$p_F(t)$ ist wohldefiniert“).

6.5 Diagonalisierbarkeit

- Kann eine lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden?
- Wie hängen geometrische und algebraische Vielfachheit zusammen?

Definition 6.5.1. Sei V endlich-dimensional, $F : V \to V$ linear. F heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich derer F als Diagonalmatrix dargestellt werden kann.

Bemerkung 6.5.2. Damit ist eine Matrix A diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Proposition 6.5.3. *Sei $F : V \to V$ linear, $x^1, \dots, x^r$ EV zu den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von F, wobei die $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschieden sind. Dann sind die $x^1, \dots, x^r$ l.u.. „EV zu verschiedenen EW sind l.u.“*

Beweis. Induktion nach r.
$r = 1$. $\{x\}$ ist l.u., weil $x \neq 0$.
$r - 1 \to r$. Sei

$$\beta_1 x^1 + \ldots + \beta_{r-1} x^{r-1} + \beta_r x^r = 0. \tag{6.1}$$

Wir wenden einerseits F auf (6.1) an, andererseits multiplizieren wir (6.1) mit λ_r:

$$\beta_1 \lambda_1 x^1 + \ldots + \beta_{r-1} \lambda_{r-1} x^{r-1} + \beta_r \lambda_r x^r = 0.$$
$$\beta_1 \lambda_r x^1 + \ldots + \beta_{r-1} \lambda_r x^{r-1} + \beta_r \lambda_r x^r = 0.$$

Durch Subtraktion folgt

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_r)x^1 + \ldots + \beta_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)x^{r-1} = 0.$$

Nach Induktionsannahme sind $x^1, \ldots, x^{r-1}$ l.u., und somit gilt

$$\beta_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}_{\neq 0} = \ldots = \beta_{r-1} \underbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)}_{\neq 0} = 0.$$

Somit gilt $\beta_1 = \ldots = \beta_{r-1} = 0$. Aus (*) folgt nun $\beta_r x^r = 0$. Da $x^r \neq 0$ gilt, folgt $\beta_r = 0$. Somit sind alle Vektoren l.u.. □

Proposition 6.5.4. *Für alle $\lambda \in \sigma(F)$ gilt*

$$1 \leq \rho(\lambda) \leq \mu(\lambda).$$

Beweis. Sei $\{x^1, \ldots, x^r\}$ eine Basis von V_λ. Diese kann zu einer Basis $\{x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n\}$ von V erweitert werden. Wir stellen F bezüglich dieser Basis dar:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I & * \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}.$$

$$p_F(t) = p_A(t) = \begin{vmatrix} (\lambda - t)I & * \\ 0 & \tilde{A} - tI \end{vmatrix} = (\lambda - t)^r p_{\tilde{A}}(t),$$

und somit gilt $\mu(\lambda) \geq r = \rho(\lambda)$. □

Sei $\sigma(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Wir betrachten die Summe

$$W = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_r}.$$

Sei $w \in W$ durch zwei Summendarstellungen gegeben,

$$w = v^1 + v^2 + \ldots + v^r,$$
$$w = \tilde{v}^1 + \tilde{v}^2 + \ldots + \tilde{v}^r$$

für $v^i, \tilde{v}^i \in V_{\lambda_i}$. Bildet man die Differenz der beiden Ausdrücke ergibt sich

$$0 = (\underbrace{v^1 - \tilde{v}^1}_{\text{EV zu } \lambda_1 \text{ oder } 0}) + \ldots + (\underbrace{v^r - \tilde{v}^r}_{\text{EV zu } \lambda_r \text{ oder } 0}).$$

Da EV zu verschiedenen EW l.u. sind, müssen alle $v^i - \tilde{v}^i = 0$ sein. Somit ist jedes w in W eindeutig als Summe $v^1 + \ldots + v^r$ darstellbar und daraus folgt

$$W = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}.$$

Satz 6.2 (Diagonalisierbarkeit)**.** *Sei V endlich dimensional, $F : V \to V$ linear, $\sigma(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *F ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von F besteht.*
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.
4. *$p_F(t)$ zerfällt über K in Linearfaktoren und es gilt $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(F)$.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) F ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $v^1, \ldots, v^d$ von V gibt, sodass F bezüglich dieser Basis die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_d \end{pmatrix}$$

besitzt. Dies ist äquivalent zu

$$F(v^1) = \mu_1 v^1, \ldots, F(v^d) = \mu_d v^d.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $v^{11}, \ldots, v^{1s_1}, v^{21}, \ldots, v^{2s_2}, \ldots, v^{r1}, \ldots, v^{rs_r}$ eine Basis von V, die aus EV besteht, nämlich $v^{ij} \in V_{\lambda_i}$ für $1 \leq j \leq s_i$. Somit kann jedes $v \in V$ als Linearkombination von Vektoren aus $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ geschrieben werden. Daraus folgt $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.
(3) $\Rightarrow$ (2) Sei $v^{i1}, \ldots, v^{is_i}$ eine Basis von V_{λ_i}. Dann spannt $v^{11}, \ldots, v^{1s_1}, v^{21}, \ldots, v^{2s_2}, \ldots, v^{r1}, \ldots, v^{rs_r}$ den Vektorraum V auf. Somit ist ein Erzeugendensystem aus Eigenvektoren von V gefunden. Da dies eine direkte Summe ist, ist dies auch eine Basis von V.
(3) $\Rightarrow$ (4)

$$\begin{aligned} d = \dim V = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = \\ = \rho(\lambda_1) + \ldots + \rho(\lambda_r) \leq \mu(\lambda_1) + \ldots + \mu(\lambda_r) \leq d. \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit und damit auch $\rho(\lambda_i) = \mu(\lambda_i)$ für alle i. Somit zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren.
(4) $\Rightarrow$ (3)

$$\begin{aligned} d = \mu(\lambda_1) + \ldots + \mu(\lambda_r) = \rho(\lambda_1) + \ldots + \rho(\lambda_r) = \\ = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_r} = \dim(V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}), \end{aligned}$$

und somit gilt

$$V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r} = V.$$

□

Beispiel 6.5.5. Fortsetzung von Beispiel 6.3.8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\sigma(A) = \{2, 3\}, \mu(2) = 2, \rho(2) = 1$, somit ist A nicht diagonalisierbar.

Beispiel 6.5.6. Fortsetzung von Beispiel 6.3.9.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma(A) = \{1, 2\}, \mu(1) = 2, \mu(2) = 1, \rho(1) = 2, \rho(2) = 1$, also ist A diagonalisierbar.

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist die Matrixdarstellung bezüglich der Basis W, die durch die Spalten von T gegeben ist.

Korollar 6.5.7. *Sei V endlich-dimensional,* $\dim V = d, F : V \to V$ *linear. Wenn F d verschiedene Eigenwerte hat, so ist F diagonalisierbar.*

Beweis. $\sigma(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$.

$$\begin{aligned} d &\geq \mu(\lambda_1) + \ldots + \mu(\lambda_d) \geq \rho(\lambda_1) + \ldots + \rho(\lambda_d) \geq \\ &\geq 1 + \ldots + 1 = d. \end{aligned}$$

Somit gilt $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(F)$. $p_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren und somit ist F laut Satz 6.2 diagonalisierbar. □

6.6 Jordan-Zerlegung

Ziel: günstige Basis zur Darstellung nicht diagonalisierbarer Abbildungen.

Definition 6.6.1 (Jordanblock)**.** Sei $r \geq 1$ und $\lambda \in K$. Dann definiere

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

„Jordanblock der Größe r zum EW λ“.

Definition 6.6.2 (Jordanform)**.** Eine Matrix heißt in Jordanform, wenn sie die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & J_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, natürliche Zahlen $r_1, \ldots, r_k$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$.

Satz 6.3 (Jordansche Normalform)**.** *Sei V endlich-dimensional, $F : V \to V$ linear, $p_F(t)$ zerfalle über K in Linearfaktoren. Dann gibt es eine Basis B von V, sodass F bezüglich der Basis B durch eine Jordanform dargestellt wird.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, sollen einige Folgerungen notiert werden.

Korollar 6.6.3 (Jordanzerlegung)**.** *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gibt es eine reguläre Matrix T und eine Jordanform J, sodass $A = T^{-1}JT$.*

Man spricht hier von der Jordanzerlegung von A, dazu gehört neben der Jordanform auch die Angabe der Transformationsmatrix T.

Beweis des Korollars. Die Abbildung $x \mapsto A \cdot x$ kann bezüglich einer geeigneten Basis in Jordanform dargestellt werden. Diese ist nach dem Satz über Basiswechsel bei linearen Abbildungen durch $T^{-1}AT$ gegeben. □

Aus der Jordanform kann man viel über die Eigenwerte und Eigenvektoren von F aussagen.

Korollar 6.6.4. *Mit den Bezeichnungen von Satz 6.3 und Definition 6.6.2 gilt:*

1. *Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von F, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit wiederholt wird, d.h., die Anzahl der einem Eigenwert zukommenden Jordanblöcke entspricht der geometrischen Vielfachheit.*

2. *Die Summe der r_j zum selben Eigenwert entspricht der algebraischen Vielfachheit, d.h.,*

$$\mu(\lambda) = \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j = \lambda}}^{k} r_j.$$

3. *Partitioniert man die Basis B in $(v_{11}, \dots, v_{1r_1}; v_{21}, \dots, v_{2r_2}; \dots; v_{k1}, \dots, v_{kr_k})$, so gilt für alle j*

$$F(v_{j1}) = \lambda_j v_{j1}, \qquad F(v_{j2}) = \lambda_j v_{j2} + v_{j1}, \qquad F(v_{jr_j}) = \lambda_j v_{jr_j} + v_{j(r_j-1)}. \tag{6.2}$$

Beweis des Korollars. Nach dem Satz über die Determinante von Dreiecksmatrizen gilt

$$\begin{aligned} p_F(t) &= \det \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) - tI_{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{r_2}(\lambda_2) - tI_{r_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_{r_k}(\lambda_k) - tI_{r_k} \end{pmatrix} \\ &= \det(J_{r_1}(\lambda_1) - tI_{r_1}) \det(J_{r_2}(\lambda_2) - tI_{r_2}) \cdots \det(J_{r_k}(\lambda_k) - tI_{r_k}) \\ &= (\lambda_1 - t)^{r_1} \cdots (\lambda_k - t)^{r_k}. \end{aligned}$$

Daraus sieht man sofort, dass die λ_j die Eigenwerte von F sind. Nach Zusammenfassen gleicher Faktoren folgt auch sofort die Aussage über die algebraische Vielfachheit.

Sei $x \in K^n$ ein Eigenvektor von J zum Eigenwert λ. Wir partitionieren x in $x^t = (x_1^t, \dots, x_k^t)^t$, wobei $x_j \in K^{r_j}$. Dann gilt $(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda I_{r_j})x_j = 0$ für $1 \le j \le k$. Es gilt $\det(J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda I_{r_j}) = (\lambda_j - \lambda)^{r_j}$. Falls $\lambda_j \neq \lambda$, so ist $J_{r_j}(\lambda_j) - \lambda I_{r_j}$ regulär, woraus $x_j = 0$ folgt. Falls $\lambda_j = \lambda$, so folgt $x_j = (\alpha_j, 0, \dots, 0)^t$ für ein beliebiges $\alpha_j \in K$. Die geometrische Vielfachheit von λ ist somit genau die Anzahl der Jordanblöcke zu λ, weil für jeden solchen genau ein Parameter zu vergeben war.

Die letzte Aussage des Korollars folgt direkt aus der Matrixdarstellung bezüglich der Basis B. □

Eine Darstellung (6.2) wird als *Kette von Hauptvektoren zum Eigenwert* λ_j bezeichnet; der erste Vektor ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_j.

Wir beweisen nun die Existenz der Jordanschen Normalform durch Induktion nach der Dimension.

Beweis von Satz 6.3. Für $\dim V = 1$ ist nichts zu zeigen.

Wir nehmen nun an, dass dass der Satz für Endomorphismen von Räumen der Dimension $< n$ gezeigt sei.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass F singulär ist. Sei $r = \operatorname{rank} F < n$. Die Einschränkung $F|_{\operatorname{Im} F}$ von F auf $\operatorname{Im} F$ ist bildet einen Endomorphismus von $\operatorname{Im} F$. Nach Voraussetzung gilt der Satz also für $F|_{\operatorname{Im} F}$, es gibt damit eine Basis $w_1, \dots, w_r$ von $\operatorname{Im} F$, sodass

$$F(w_i) = \lambda(i) w_i \quad \text{oder} \quad F(w_i) = \lambda(i) w_i + w_{i-1},$$

wobei die $\lambda(i)$ passend gewählt werden.

Sei $p := \dim(\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F)$. Wir wählen eine Basis $x_1, \dots, x_p$ von $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F$ und ergänzen sie zu einer Basis $x_1, \dots, x_p, z_1, \dots, z_{n-r-p}$ von $\operatorname{Ker} F$.

Da $\operatorname{Ker} F|_{\operatorname{Im} F} = \operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Im} F$, hat 0 geometrische Vielfachheit p als Eigenwert von $F|_{\operatorname{Im} F}$, weshalb $F|_{\operatorname{Im} F}$ p Jordanblöcke (und damit p Ketten) zum Eigenwert 0 hat. Die $j$te Kette zum Eigenwert 0 von $F|_{\operatorname{Im} F}$ ende mit einem Vektor w_{i_j}. Da w_{i_j} nach Konstruktion ein Element von $\operatorname{Im} F$ ist, gibt es einen Vektor $y_j \in V$ mit $F(y_j) = w_{i_j} = 0 \cdot y_j + w_{i_j}$. Somit können wir diese Kette um den Vektor y_j, der nicht mehr in $\operatorname{Im} F$ liegen muss, verlängern.

Sobald wir gezeigt haben, dass $w_1, \dots, w_r, y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-r-p}$ linear unabhängig sind, ist der Beweis (für singuläres F) erbracht: Die $y_1, \dots, y_p$ lassen sich in bestehende Ketten von

w_j einbinden, die $z_1, \ldots, z_{n-r-p}$ bilden jeweils eine Kette für sich und diese Ketteneigenschaften übersetzen sich (bei geeigneter Reihenfolge der Basisvektoren, d.h., die y_j müssen an das Ende „ihrer" Kette gesetzt werden) direkt in die Jordanform.

Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_r, y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_{n-r-p}$. Dazu nehmen wir an, dass

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j + \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j + \sum_{j=1}^{n-r-p} \gamma_j z_j = 0, \tag{6.3}$$

wobei $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in K$. Wir wenden zunächst F auf (6.3) an und erhalten

$$\sum_{j=1}^{r} (\alpha_j \lambda(j) w_j + \delta_j w_{j-1}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j F(y_j) = 0, \tag{6.4}$$

wobei die $\delta_j \in \{0, 1\}$, weil nach Voraussetzung $F(z_j) = 0$ gilt. Es gilt nach Konstruktion $F(y_j) = w_{i_j}$, weshalb es sich bei (6.4) um eine Linearkombination von $w_1, \ldots, w_r$ handelt. Da w_{i_j} ein Hauptvektor zum Eigenwert 0 ist, tritt w_{i_j} in (6.4) genau einmal auf, nämlich mit dem Koeffizienten β_j. Daraus und aus der linearen Unabhängigkeit der w_i folgt $\beta_j = 0$ für $1 \le j \le p$. Wir können damit (6.3) zu

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j = - \sum_{j=1}^{n-r-p} \gamma_j z_j \tag{6.5}$$

umschreiben. Die linke Seite von (6.5) ist als Linearkombination der w_j ein Element von $\operatorname{Im} F$, die rechte Seite von (6.5) ist als Linearkombination der z_j ein Element von $\operatorname{Ker} F$. Somit sind beide Seiten von (6.5) ein Element von $\operatorname{Im} F \cap \operatorname{Ker} F$ und damit als Linearkombination der x_j schreibbar. Da allerdings $x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_{n-r-p}$ eine Basis von $\operatorname{Ker} F$ bilden, folgt $\gamma_j = 0$ für $1 \le j \le n - r - p$. Aus (6.5) folgt damit $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j = 0$, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit der w_j sofort $\alpha_j = 0$ für $1 \le j \le r$ folgt. Damit ist der Beweis des Satzes für singuläres F erbracht.

Falls F regulär ist, so wählen wir einen beliebigen Eigenwert λ von F und wenden das Bewiesene auf die singuläre Abbildung $F - \lambda \operatorname{id}$ an. Aus der darstellenden Matrix von $F - \lambda \operatorname{id}$ in Jordanform erhalten wir durch Addition von λI die darstellende Matrix von F, und zwar ebenfalls in Jordanform. □

Beispiel 6.6.5. Fortsetzung von Beispiel 6.3.8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen bereits $\mu(2) = 2$, $\mu(3) = 1$, $\rho(2) = 1$, $\rho(3) = 1$, $V_2 = \operatorname{span}\{(1,0,0)^t\}$, $V_3 = \operatorname{span}\{(1,1,-2)^t\}$. Wir machen nun folgenden unbestimmten Ansatz.

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AT = T \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $T = (x^1, x^2, x^3)$. Aus $Ax^1 = 3x^1$ folgt x^1 ist EV zum EW 3, $x^1 = (1,1,-2)^t$. Aus $Ax^2 = 2x^2$ folgt x^2 ist EV zum EW 2, und daraus folgt $x^2 = (1,0,0)^t$. $Ax^3 = 1x^2 + 2x^3$ ist äquivalent zu $(A - 2I)x^3 = x^2$ und daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erhalte somit mehrere Lösungen, benötige aber nur eine Lösung. Zum Beispiel $x = 0, y = 1, z = -1$, also gilt $x^3 = (0, 1, -1)^t$. Insgesamt erhält man nun

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.7 Anwendungen von Jordan-Zerlegung bzw. Diagonalisierung

6.7.1 Matrizenpotenzen

Gegeben seien $A \in K^{n\times n}, k \in \mathbb{N}$. Gesucht ist A^k (k meist symbolisch). Sei $T^{-1}AT = J$ die Jordan-Zerlegung.

$$\begin{aligned} A &= TJT^{-1}, \\ A^k &= \underbrace{(TJT^{-1})(TJT^{-1})\dots(TJT^{-1})}_{k} = TJ^kT^{-1}, \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}, \quad J^k = \begin{pmatrix} J_{r_1}^k(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_m}^k(\lambda_m) \end{pmatrix}.$$

Die λ_i sind nicht notwendig verschieden. Wie sieht $J_r^k(\lambda)$ aus?

$$J_r(\lambda) = \lambda I + Z, \quad \text{wobei } Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_r^k(\lambda) = (\lambda I + Z)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\lambda I)^{k-l} Z^l. \tag{6.6}$$

(Gewissensbisse: Gilt der binomische Lehrsatz auch für Matrizen? Suche aus $(\lambda I + Z)\cdots(\lambda I + Z)$ (k-mal) l Positionen aus, wo Z genommen wird, sonst λI ($(k-l)$-mal). Typischer Summand: $(\lambda I)Z \cdot Z(\lambda I)\dots Z(\lambda I)$. Umschreiben auf $(\lambda I)^{k-l}Z^l$ ist nur möglich, wenn kommutativ. Über einem Körper geht das gut, über Matrizen im Allgemeinen schief. In unserem speziellen Fall gilt: I kommutiert mit allen Matrizen, also kann auch der binomische Lehrsatz angewendet werden.) Wir brauchen nun Z^l.

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = [j = i+1].$$

Dabei verwenden wir die „Iverson-Notation“

$$[\text{Bedingung}] := \begin{cases} 1 & \text{Bedingung wahr,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung: $Z^l = [j = i + l]_{1 \le i,j \le r}$.
$l = 1$: Alles klar.
$l \to l + 1$:

$$Z^{l+1} = Z^l \cdot Z = ([j = i + l])_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}} ([s = j + 1])_{\substack{1 \le j \le r \\ 1 \le s \le r}} = \left(\sum_{j=1}^{r} \underbrace{[j = i + l][s = j + 1]}_{[j=i+l][j=s-1]} \right)_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le s \le r}}$$
$$= ([i + l = s - 1])_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le s \le r}} = ([s = i + (l + 1)])_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le s \le r}}.$$

Damit hat Z^{l+1} die behauptete Form. Wir setzen nun in (6.6) ein:

$$(J_r^k(x))_{ij} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} \underbrace{[j = i + l]}_{[l=j-i]} = \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)}.$$

$$J_r^k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & 1/2k(k-1)\lambda^{k-2} & \dots & k(k-1)\dots(k-r+2)\lambda^{k-(r-1)} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1/2k(k-1)\lambda^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ 0 & & & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Setze $g(\lambda) = \lambda^k$, erhalte dann folgende Matrix:

$$J_r^k(\lambda) = \begin{pmatrix} g(\lambda) & \frac{g'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{g^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{g'(\lambda)}{1!} \\ 0 & & & g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Für die einzelnen Elemente dieser Matrix ergibt sich also

$$(J_r^k(\lambda))_{i,j} = \frac{g^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!},$$

wobei es sich hierbei um eine „rein formale Differentiation“ handelt.

Satz 6.4 (Matrizenpotenzen)**.** *Sei $A \in K^{n \times n}$ mit Jordanzerlegung*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}.$$

$f(t)$ sei ein Polynom in t mit Koeffizienten aus K. Dann gilt

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(J_{r_1}(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_{r_m}(\lambda_m)) \end{pmatrix} T^{-1},$$

wobei $(f(J_r(\lambda)))_{ij} = \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}$.

Beweis. Wenn $f(t) = \sum\limits_{l=0}^{k} c_l t^l$, so ist

$$f(A) = \sum_{l=0}^{k} c_l A^l = \sum_{l=0}^{k} c_l T J^l T^{-1} = T \left(\sum_{l=0}^{k} c_l J^l \right) T^{-1}.$$

Aus obiger Berechnung von J^l und der Linearität der Differentiation folgt alles. □

Korollar 6.7.1. *Sei $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

$$A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}.$$

6.7.2 Satz von Cayley-Hamilton

Korollar 6.7.2 (Satz von Cayley-Hamilton)**.** *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt $p_A(A) = 0$.*

Beweis. (für den Fall, dass $p_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt).

$$p_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (t - \lambda_s)^{\mu_s},$$

für verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Sei $1 \le l \le s$ fest. Dann muss ich $p_A(J_r(\lambda_l))$ berechnen (für gewisse r). Dazu muss ich p_A bis $(r-1)$ mal ableiten, und λ_l einsetzen. Wir wissen $r \le \mu_l$. Behauptung: $p_A^{(k)}(t) = (t - \lambda_l)^{\mu_l - k} q_k(t)$, $0 \le k < \mu_l$ für ein Polynom q_k.

Beweis. $k = 0$: Alles klar.
$k \to k+1$:

$$\begin{aligned} p_A^{(k+1)}(t) &= \left((t-\lambda_l)^{\mu_l - k} q_k(t) \right)' = \\ &= (t-\lambda_l)^{\mu_l-(k+1)} (\mu_l - k) q_k(t) + (t-\lambda_l)^{\mu_l - k} q_k'(t) = \\ &= (t-\lambda_l)^{\mu_l-(k+1)} \underbrace{((\mu_l - k) q_k(t) + (t-\lambda_l) q_k'(t))}_{q_{k+1}(t)}. \end{aligned}$$

□

Daher gilt $p_A^{(k)}(\lambda_l) = 0$ für $0 \le k \le \mu_l$. Also gilt $p_A^{(k)}(J_r(\lambda_l)) = 0$, und daraus folgt $p_A(A) = 0$. □

6.7.3 Asymptotisches Verhalten diskreter dynamischer Systeme

Gegeben: $A \in \mathbb{C}^{d\times d}, x^0 \in \mathbb{C}^d, x^{n+1} = Ax^n$.

Beispiel 6.7.3. Betrachte noch einmal das Beispiel 6.1.2.

$$x^n = Ax^{n-1} = A^2 x^{n-2} = \dots = A^n x^0.$$

Um asymptotisches Verhalten von x^n zu verstehen, muss ich jenes von A^n verstehen. Sei $T^{-1}AT = J$ in Jordanform.

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}.$$

Wie verhält sich $J_r(\lambda)^n$ asymptotisch?
Die Einträge von $(J_r(\lambda))^n$ mit $0 \le l \le r-1$ sind

$$\binom{n}{l} \lambda^{n-l} = \underbrace{\frac{1}{\lambda^l l!}}_{\text{konstant}} \underbrace{n(n-1)\dots(n-l+1)}_{\text{Polynom vom Grad } l} \underbrace{\lambda^n}_{\text{geom. Folge}}.$$

Falls $|\lambda| < 1$: Jeder Eintrag von $(J_r(\lambda))^n$ ist konvergent gegen 0. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|(J_r(\lambda))^n\|_\infty = 0$, und daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \|(J_r(\lambda))^n\| = 0$ in jeder Norm (Normäquivalenzsatz).
Falls $|\lambda| > 1$: Jeder Eintrag von $J_r(\lambda)^n$ ist unbeschränkt. $\lim\limits_{n\to\infty} \|J_r(\lambda)^n\| = \infty$.
Falls $|\lambda| = 1$: Einträge mit $l = 0$ beschränkt, Einträge mit $l > 0$ unbeschränkt.
Falls $r = 1$: $\|J_r(\lambda)^n\|$ beschränkt.
Falls $r > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \|J_r(\lambda)^n\| = +\infty$.
$r > 1$ tritt genau dann auf, wenn $\rho(\lambda) < \mu(\lambda)$.

Definition 6.7.4. Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. Dann heißt

$$s(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

der „Spektralradius“ von A.

Satz 6.5. *Sei $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und $\|\cdot\|$ eine Matrizennorm.*

1. *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

   (a) $s(A) < 1$.

   (b) Für alle $x \in \mathbb{C}^d$ gilt $\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.

2. *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

   (a) $s(A) \leq 1$ und für alle $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = 1$ gilt $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$.

   (b) Für alle $x \in \mathbb{C}^d$ ist $A^n x$ beschränkt.

   (c) $\|A^n\|$ ist beschränkt.

3. *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

   (a) $s(A) > 1$ oder es gibt einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$ von A mit $\rho(\lambda) < \mu(\lambda)$.

   (b) Es gibt ein $x \in \mathbb{C}^d$, sodass $A^n x$ unbeschränkt ist.

   (c) $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = \infty$.

6.7.4 Lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

Seien $a_1, \ldots, a_m \in K, a_m \neq 0$. Wir betrachten die Menge W der Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$, die die Rekursion

$$x_{n+m} = a_1 x_{n+m-1} + \ldots + a_m x_n \tag{6.7}$$

für $n \geq 0$ erfüllen.

Beispiel 6.7.5. Fibonacci-Zahlen ($n \geq 0$)

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

$m \ldots$Ordnung der Rekursion. W ist offensichtlich ein K-Vektorraum. Jedes Tupel von Startwerten $(x_{m-1}, \ldots, x_0) \in K^m$ entspricht genau einer Lösung. Das ist also ein Vektorraumisomorphismus $K^m \to W$, und daraus folgt $\dim W = m$. Setze

$$z_n := \begin{pmatrix} x_{n+m-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+m} \\ x_{n+m-1} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_{n+m-1} + a_2 x_{n+m-2} + \ldots + a_{m-1} x_{n+1} + a_m x_n \\ x_{n+m-1} \\ x_{n+m-2} \\ \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A z_n,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Um $z_{n+1} = A z_n$ zu verstehen, benötigen wir die Jordanzerlegung von A. Sei x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

$$Ax = \lambda x, \quad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \lambda x_m, \\ x_{m-2} &= \lambda x_{m-1} = \lambda^2 x_m, \\ x_1 &= \lambda x_2 = \lambda^{m-1} x_m, \\ x &= x_m \begin{pmatrix} \lambda^{m-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit haben alle Eigenwerte geometrische Vielfachheit 1. Aus der ersten Zeile von (6.8) erhalten wir

$$a_1 \lambda^{m-1} + a_2 \lambda^{m-2} + \ldots + a_m = \lambda^m,$$

also ist das das charakteristische Polynom von A.

Bemerkung 6.7.6. Das charakteristische Polynom kann man aus (6.7) durch formales Einsetzen von $x_n = \lambda^n$ und anschließendes Kürzen von λ^n erhalten.

Wenn ein EW λ eine algebraische Vielfachheit $\mu(\lambda) > 1$ besitzt, so ist A nicht diagonalisierbar, da $\rho(\lambda) = 1$.

Jordan-Zerlegung:

$$T^{-1} A T = J = \begin{pmatrix} J_{\mu_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mu_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

für die EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von A mit algebraischen Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_r$ (weil Anzahl(Jordanblöcke zum EW λ) $= \rho(\lambda)$).

$$z_n = A^n z_0 = T \begin{pmatrix} J^n_{\mu_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J^n_{\mu_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} T^{-1} z_0.$$

Es gilt $x_n \in \operatorname{span}\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{\mu_1 - 1}\lambda_1^n, \ldots, \lambda_r^n, n\lambda_r^n, \ldots, n^{\mu_r - 1}\lambda_r^n\}$ und daraus folgt

$$\underbrace{W}_{\dim m} \subseteq \underbrace{\operatorname{span}\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{\mu_1 - 1}\lambda_1^n, \ldots, \lambda_r^n, n\lambda_r^n, \ldots, n^{\mu_r - 1}\lambda_r^n\}}_{\dim m},$$

somit gilt Gleichheit.

Satz 6.6. *Seien* $a_1, \dots, a_m \in K, a_m \neq 0,$

$$W = \{(x_n)_{n \geq 0} \in K : x_{n+m} = a_1 x_{n+m-1} + \ldots + a_m x_n,\ n \geq 0\}$$

und $p(t) = t^m - a_1 t^{m-1} - \ldots - a_{m-1} t - a_m$. *Dann ist* W *ein* m*-dimensionaler* K*-Vektorraum. Falls* $p(t)$ *über* K *in Linearfaktoren zerfällt, so ist eine Basis von* W *durch*

$$\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \dots, n^{\mu_1 - 1}\lambda_1^n, \dots, \lambda_r^n, \dots, n^{\mu_r - 1}\lambda_r^n$$

gegeben, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *die verschiedenen Nullstellen von* $p(t)$ *mit Vielfachheiten* $\mu_1, \dots, \mu_r$ *sind.*

Beispiel 6.7.7.

$$x_{n+3} = 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n,$$

wobei $n \geq 0$. Startwerte: $x_0 = 4, x_1 = 9, x_2 = 17$.

$$p(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

$t = 1$ ist eine Nullstelle, also gilt $p(t) = (t^2 - 3t + 2)(t - 1) = (t - 2)(t - 1)(t - 1)$, und daraus folgt $\lambda_1 = 1, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 2, \mu_2 = 1$. Somit haben wir eine Basis gefunden, nämlich $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \lambda_2^n$, also $1, n, 2^n$. Mache folgenden unbestimmten Ansatz

$$x_n = A \cdot 1 + Bn + C2^n,$$

$$\begin{aligned} 4 &= A + + C \\ 9 &= A + B + 2C \\ 17 &= A + 2B + 4C \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $A = 1, B = 2, C = 3$ und wir bekommen so die explizite Darstellung $x_n = 1 + 2n + 3 \cdot 2^n$.

6.7.5 Differentialgleichungen

siehe Vorlesung Differentialgleichungen.

Kapitel 7

Eigenwerte über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Für dieses Kapitel sei $\mathbb{K}^n$ mit dem Standard-IP versehen.

7.1 Schursche Normalform

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Wann gibt es eine Orthogonalbasis von $\mathbb{K}^n$, die aus EV von A besteht?

Satz 7.1 (Schursche Normalform). *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $p_A(t)$ zerfalle über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren. Dann gibt es ein unitäres $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodass $U^*AU = R$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Beweis. Induktion nach n.
$n = 1$. $U = I_1 = 1$.
$(n-1) \to n$. Sei u (mit $\|u\| = 1$) ein Eigenvektor von A zum EW λ. Sei $W \in \mathbb{K}^{n\times(n-1)}$ sodass $U_1 = [u, W]$ unitär ist.

$$\begin{aligned} U_1^*AU_1 &= \begin{pmatrix} u^* \\ W^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* \\ W^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda u & AW \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda u^*u & * \\ \lambda W^*u & W^*AW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & W^*AW \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

weil u auf die Spalten von W normal steht. Laut Induktionsvoraussetzung gibt es ein unitäres $U_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, sodass $U_2^*(W^*AW)U_2$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Setze $U := U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} U^*AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{pmatrix} U_1^*AU_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & W^*AW \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & U_2^*W^*AWU_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei R_2 eine obere Dreiecksmatrix ist. □

7.2 Unitäre Diagonalisierbarkeit

Definition 7.2.1. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt normal, wenn $A^*A = AA^*$.

Satz 7.2 (Unitäre Diagonalisierbarkeit). *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $p_A(t)$ zerfalle über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist normal.*
2. *Es gibt eine Orthogonalbasis von $\mathbb{K}^n$, die aus EV von A besteht.*

3. *Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist. „A ist unitär diagonalisierbar".*

Beweis. (3) $\Leftrightarrow$ (2) :

$$\begin{aligned}
(3) &\Leftrightarrow U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\\
&\Leftrightarrow AU = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\\
&\Leftrightarrow Au^i = \lambda_i u^i \quad \text{für } 1 \le i \le n \text{ und } U = (u^1, \dots, u^n)\\
&\Leftrightarrow (2)
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) :
Es gilt $U^*AU = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
A &= UDU^*,\\
AA^* &= UDU^*(UD^*U^*) = UD\overline{D}U^* = U \operatorname{diag}(\lambda_1\overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_n\overline{\lambda_n})U^*,\\
A^*A &= (UD^*U^*)UDU^* = U\overline{D}DU^* = U \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}\lambda_1, \dots, \overline{\lambda_n}\lambda_n)U^*,
\end{aligned}$$

und daraus folgt $AA^* = A^*A$.
(1) $\Rightarrow$ (3) :
Schursche Normalform (Satz 7.1): Es gibt eine unitäre Matrix U, sodass $U^*AU = R$ (R obere Dreiecksmatrix).

$$\begin{aligned}
A &= URU^*,\\
A^* &= UR^*U^*,\\
AA^* &= URR^*U^* =\\
A^*A &= UR^*RU^*.
\end{aligned}$$

und daraus folgt $R^*R = RR^*$. R ist normal.
Behauptung: Eine $(n \times n)$-Matrix R, die normal und obere Dreiecksmatrix ist, ist eine Diagonalmatrix.

Beweis der Behauptung. Induktion nach n.
$n = 1$. Alles klar.
$(n-1) \to n$. Sei $R = \begin{pmatrix} a & b^* \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$. R_1 ist eine $(n-1) \times (n-1)$ obere Dreiecksmatrix. Es gilt

$$\begin{aligned}
R^*R &= \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ b & R_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b^* \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & \overline{a}b^* \\ ba & bb^* + R_1^*R_1 \end{pmatrix}\\
RR^* &= \begin{pmatrix} a & b^* \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ b & R_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b^*b & ? \\ ? & R_1R^* \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $a\overline{a} + b^*b = a\overline{a}$, somit muss $b^*b = 0$ gelten und daraus folgt schließlich $\|b\|_2{}^2 = 0 \Rightarrow b = 0$. Außerdem gilt $R_1R_1^* = R_1^*R_1$ und dies bedeutet, dass R_1 eine normale obere $(n-1) \times (n-1)$ Dreiecksmatrix ist. Aus der Induktionsannahme folgt nun, dass R_1 ist eine Diagonalmatrix und somit ist auch R eine Diagonalmatrix ist. □

□

Bemerkung 7.2.2.

- Aus A reell und symmetrisch folgt A ist normal.
- Aus A unitär folgt A ist normal.

Satz 7.3. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$, dann ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Sei x ein EV zum EW λ. Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{\lambda\langle x,x\rangle}{\langle x,x\rangle} &= \frac{\langle x,\lambda x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle x,Ax\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle A^*x,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \\ &= \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\langle \lambda x,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \frac{\overline{\lambda}\langle x,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \overline{\lambda},\end{aligned}$$

und daraus folgt $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Korollar 7.2.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^t = A$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Q^tQ = QQ^t = I$, sodass $Q^tAQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Beweis. A ist normal. Aus $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ folgt, dass $p_A(t)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Satz 7.2 folgt, dass A über den reellen Zahlen unitär (also orthogonal) diagonalisierbar ist. □

Beispiel 7.2.4. Fortsetzung von Beispiel 6.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es war kein Zufall, dass die Eigenvektoren eine Orthogonalmatrix bilden.

Beispiel 7.2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & -8 \\ -16 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und reell, und besitzt folgende Eigenwerte:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 7-t & -16 & -8 \\ -16 & 7-t & 8 \\ -8 & 8 & -5-t \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 7-t & -16 & -8 \\ -9-t & -9-t & 0 \\ -8 & 8 & -5-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9-t & -16 & -8 \\ -18-2t & -9-t & 0 \\ 0 & 8 & -5-t \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -9-t & -16 & -6 \\ 0 & 23-t & 16 \\ 0 & 8 & -5-t \end{vmatrix} = (-9-t)\begin{vmatrix} 23-t & 16 \\ 8 & -5-t \end{vmatrix} = \\ &= (-9-t)(t^2-18t-243) = \\ &= (-9-t)(t-27)(t+9).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda_1 = -9, \mu(-9) = 2, \lambda_2 = 27, \mu(27) = 1$. Da A unitär diagonalisierbar ist, folgt außerdem $\rho(-9) = 2$. Betrachte nun die Eigenvektoren zu -9

$$\begin{pmatrix} 16 & -16 & -8 \\ -16 & 16 & 8 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix} x = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich $y = s, z = 2t, x = s + t$ oder anders geschrieben

$$x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Eigenvektoren $(1,1,0)^t, (1,0,2)^t$ stehen nicht aufeinander normal. Um eine ONB des Vektorraumes zu erhalten, kann Gram-Schmidt verwendet werden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Suche nun den EV zu $\lambda = 27$

$$\begin{pmatrix} -20 & -16 & -8 \\ -16 & -20 & 8 \\ -8 & 8 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -9 & -9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich $x = t, y = -t, z = -\frac{1}{2}t$ oder anders geschrieben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Unitäre Diagonalisierung sagt, dass EV zu verschiedenen EW orthogonal sind, für Orthogonalbasis von einzelnen Eigenräumen bin ich selbst verantwortlich.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$
$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7.2.6 (Spektralzerlegung für normale Matrizen)**.** *Sie $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ normal mit $U^* A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für ein $U = (u^1, \dots, u^n)$ unitär. Dann gilt*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^i (u^i)^*.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A &= U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^* \\ &= (u^1, \dots, u^n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) ((u^1)^*, \dots, (u^n)^*)^t = \\ &= (\lambda_1 u^1, \dots, \lambda_n u^n) ((u^1)^*, \dots, (u^n)^*)^t = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u^i (u^i)^*. \end{aligned}$$

□

7.3 Anwendung: Klassifikation von Kegelschnitten

Wir betrachten $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = a_{20} x^2 + 2a_{11} xy + a_{02} y^2 + 2a_{10} x + 2a_{01} y + a_{00}\}$ für gewisse Konstanten $a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00} \in \mathbb{R}$. Es handelt sich um eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Es gelte nicht $a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0$ (sonst ist die Kurve eine Gerade).

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ a_{11} & a_{02} & a_{01} \\ a_{10} & a_{01} & a_{00} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & c \\ c^t & a_{00} \end{pmatrix}.$$

B symmetrisch, A symmetrisch und $A \neq 0$. Sei $\tilde{Q}^t A \tilde{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ eine unitäre Diagonalisierung von A. O.B.d.A $\lambda_1 \neq 0$. $Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls orthogonal.

$$F = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} Q Q^t B Q Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tilde{Q}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dann folgt daraus

$$F = \begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix} Q^t B Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^t B Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & c \\ c^t & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}^t A \tilde{Q} & \tilde{Q}^t c \\ c^t \tilde{Q} & a_{00} \end{pmatrix}.$$

Setze $\tilde{Q}^t c = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ und erhalte somit

$$F = \begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & \lambda_2 & f \\ e & f & a_{00} \end{pmatrix}}_{=:C} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $C = Q^t B Q$ und ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben, gilt $\det C = \det B, \det A = \lambda_1 \lambda_2, \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$. Wir bemerken, dass

$$\det B = \det C = \lambda_1 \lambda_2 a_{00} - \lambda_1 f^2 - \lambda_2 e^2. \tag{7.1}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} F &= \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + 2eu + 2fv + a_{00} \\ &= \lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 v^2 + 2fv + a_{00} - \frac{e^2}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden einige Fälle.

1. $\lambda_2 = 0,\ f = 0$. Dieser Fall ist gleichbedeutend mit $\det A = 0$ und $\det B = 0$. Es muss also $\operatorname{rank} A = 1$ und $\operatorname{rank} B \leq 2$ gelten. $F = 0$ kann zu

$$\lambda_1 \left(u + \frac{e}{\lambda_1} \right)^2 = \frac{e^2}{\lambda_1} - a_{00} \tag{7.2}$$

umgeformt werden. Je nachdem, ob auf die rechte Seite von 0 verschieden ist oder nicht, unterscheiden wir zwei Unterfälle:

(a) $a_{00} = e^2/\lambda_1$. In diesem Fall hat C die Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e^2/\lambda_1 \end{pmatrix},$$

die dritte Zeile ist also das (e/λ_1)-fache der ersten Zeile, das heißt, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = 1$. Bei (7.2) handelt es sich um die Gerade $u = -e/\lambda_1$ (doppelt).

(b) $a_{00} \neq e^2/\lambda_1$. Es muss also $\operatorname{rank} B = 2$ gelten. Falls $e^2/\lambda_1^2 - a_{00}/\lambda_1 < 0$, gibt es keine Lösung, andernfalls handelt es sich um zwei parallele Geraden

$$\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right) = \pm\sqrt{\frac{e^2}{\lambda_1^2} - \frac{a_{00}}{\lambda_1}}.$$

2. $\lambda_2 = 0$, $f \neq 0$. Es gilt daher $\operatorname{rank} A = 1$. Nach (7.1) ist $\det B \neq 0$, also $\operatorname{rank} B = 3$. Die Kurve hat die Gestalt

$$\left(u + \frac{e}{\lambda_1}\right)^2 = -\frac{2f}{\lambda_1}\left(v + \frac{a_{00}}{2f} - \frac{e^2}{2f\lambda_1}\right),$$

es handelt sich daher um eine Parabel.

3. $\lambda_2 \neq 0$. Es gilt $\operatorname{rank} A = 2$. Die Kurve hat die Gestalt

$$\lambda_1 r^2 + \lambda_2 s^2 = -\frac{\det B}{\det A}, \tag{7.3}$$

wobei die Translationen $r = u + e/\lambda_1$, $s = v + f/\lambda_2$ vorgenommen wurden. Wir betrachten Unterfälle:

(a) $\det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$, aber $\det B = 0$. Da $\operatorname{rank} A = 2$, kann nur $\operatorname{rank} B = 2$ gelten. In diesem Fall ist (7.3) äquivalent zu

$$(\sqrt{|\lambda_1|}r - \sqrt{|\lambda_2|}s)(\sqrt{|\lambda_1|}r + \sqrt{|\lambda_2|}s) = 0,$$

es handelt sich um zwei schneidende Geraden.

(b) $\det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$ und $\det B \neq 0$, also $\operatorname{rank} B = 3$. Bei (7.3) handelt es sich um eine Hyperbel.

(c) $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$ und $\operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\lambda_2) = -\operatorname{sign}(\det B)$. Da in diesem Fall $\operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A)$, ist der Fall äquivalent zu $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A \det B < 0$. Bei (7.3) handelt es sich um eine Ellipse.

(d) $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$ und $\operatorname{sign}(\lambda_1) = \operatorname{sign}(\lambda_2) = \operatorname{sign}(\det B)$, also $\det A > 0$ und $\operatorname{tr} A \det B > 0$. In diesem Fall hat (7.3) keine Lösung.

(e) $\det A = \lambda_1\lambda_2 > 0$ und $\det B = 0$, also $\operatorname{rank} B = 2$. In diesem Fall hat (7.3) nur die Lösung $(r, s) = (0, 0)$, es handelt sich also um einen Punkt.

Wir können also die Fälle in folgender Tabelle zusammenfassen:

$\operatorname{rank} A$	$\det A$	$\operatorname{tr} A \det B$	$\operatorname{rank} B = 3$	$\operatorname{rank} B = 2$	$\operatorname{rank} B = 1$
2	< 0		Hyperbel	2 schneidende Geraden	—
	> 0	< 0	Ellipse	1 Punkt	
		> 0	$\emptyset$		
1			Parabel	2 Parallele Geraden oder leer	1 Gerade (doppelt)

Kapitel 8

Eigenwerte bei symmetrischen Matrizen

8.1 Rayleigh-Ritz-Prinzip

$$\rho_A(x) = \frac{x^* A x}{x^* x} \quad \text{Rayleigh-Quotient.}$$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $A^* = A$. Was sagt ρ_A über Eigenwerte von A?
Falls x EV zum EW λ, dann gilt $\rho_A(x) = \lambda$. Wir haben auch gesehen, dass $\operatorname{grad} \rho_A(x) = 0$, falls x ein EV ist.

Satz 8.1 (Rayleigh-Ritz)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A^* = A$ und EW $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Dann gilt*

$$\min_{0 \neq x \in \mathbb{K}^n} \rho_A(x) = \lambda_1,$$
$$\max_{0 \neq x \in \mathbb{K}^n} \rho_A(x) = \lambda_n.$$

Beweis 1. Da $\rho_A(x) = \rho_A(\alpha x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, müssen wir $\rho_A(x)$ nur auf der Einheitskugel $S = \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_2 = 1\}$ betrachten. ρ_A ist dort stetig und S ist kompakt, daher nimmt ρ_A dort Minimum und Maximum an. Daher sind Minimum und Maximum von ρ_A endlich und werden angenommen. In $\mathbb{K}^n$ gilt bei Minima bzw. Maxima, dass $\operatorname{grad} \rho_A(x) = 0$, also folgt daraus (mit etwas Rechnung), das x ein EV ist. λ_1 ist somit der kleinste Wert und λ_n der Größte. □

Beweis 2. Sei $v^1, \ldots, v^n$ eine ONB von EV von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Somit gilt $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v^i$ für passende α_i.

$$\rho_A(x) = \frac{\sum_{i,j} \overline{\alpha_i} (v^i)^* A \alpha_j v^j}{\sum_{i,j} \overline{\alpha_i} (v^i)^* \alpha_j v^j} = \frac{\sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j (v^i)^* \lambda_j v^j}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}. \tag{8.1}$$

Daraus folgt

$$\rho_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} \leq \frac{\lambda_n \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} = \lambda_n,$$
$$\rho_A(x) = \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} \geq \frac{\lambda_1 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} = \lambda_1.$$

□

Wie kann ich andere EW erhalten?
Um zum Beispiel den ersten EW λ_1 im Beweis zu Satz 8.1 auszuschalten, muss dafür gesorgt werden, dass $\alpha_1 = 0$. α_1 ist Fourierkoeffizient von x zu v^1. Somit gilt $\alpha_1 = \langle v^1, x\rangle = 0$, dies ist äquivalent zu $x \in (\operatorname{span}\{v^1\})^\perp$.

$$\lambda_2 = \min_{0\neq x\in(\operatorname{span}\{v^1\})^\perp} \rho_A(x).$$

Proposition 8.1.1. *Sei A wie in Satz 8.1. Dann gilt*

$$\min_{0\neq x\in(\operatorname{span}\{v^1,\ldots,v^{k-1}\})^\perp} \rho_A(x) = \lambda_k,$$
$$\max_{0\neq x\in(\operatorname{span}\{v^{n+1-k+1},\ldots,v^n\})^\perp} \rho_A(x) = \lambda_{n+1-k}.$$

für $1 \leq k \leq n$, *wobei* $v^1,\ldots,v^n$ *die EV von A zu den EW* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *sind.*

Beweis. $x \in (\operatorname{span}\{v^1,\ldots,v^{k-1}\})^\perp$ ist äquivalent dazu, dass $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$ und das in Beweis von Satz 8.1 verwenden. □

Satz 8.2 (Courant-Fischer, Min-Max-Prinzip für EW)**.** *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *mit* $A^* = A$ *mit EW* $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *und* $1 \leq k \leq n$.

$$\max_{\substack{W \text{ UVR von } \mathbb{K}^n\\ \dim W=k-1}} \min_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x) = \lambda_k,$$
$$\min_{\substack{W \text{ UVR von } \mathbb{K}^n\\ \dim W=k-1}} \max_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x) = \lambda_{n+1-k}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst nur die erste Gleichung und folgern dann daraus die zweite. Sei $m_A(W) := \min_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x)$. Laut Proposition 8.1.1 gilt

$$m_A(\operatorname{span}\{v^1,\ldots,v^{k-1}\}) = \lambda_k.$$

Daher gilt $\max_{\dim W=k-1} m_A(W) \geq \lambda_k$. Sei jetzt W ein fester Teilraum von $\mathbb{K}^n$ der Dimension $k-1$.

Seien $v^1,\ldots,v^n$ wieder eine ONB von EV. Da $\dim W^\perp = n-k+1$, muss

$$\{v^1\ldots,v^k\} \cap W^\perp \neq \{0\}$$

gelten, sonst wäre $\{v^1,\ldots,v^k\} \oplus W^\perp$ eine direkte Summe der Dimension $k+(n-k+1) = n+1 > n$, Widerspruch. Daher gibt es ein $0 \neq z \in W^\perp$, das als

$$z = \sum_{i=1}^k \alpha_i v^i$$

geschrieben werden kann. Aus (8.1) folgt

$$\rho_A(z) = \frac{\sum\limits_{i=1}^k |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^k |\alpha_i|^2} \leq \lambda_k.$$

Daher gilt $m_A(W) \leq \rho_A(z) \leq \lambda_k$. Somit wäre der erste Teil der des Satzes gezeigt, der zweite Teil ergibt sich direkt aus dem ersten durch folgende Überlegung. Da die Eigenwerte von $-A$

$$-\lambda_{n+1-1} \leq -\lambda_{n+1-2} \leq \ldots \leq -\lambda_{n+1-n}$$

sind, gilt laut Teil 1

$$\begin{aligned}
\max_{\dim W=k-1} m_{-A}(W) &= -\lambda_{n+1-k},\\
\max_{\dim W=k-1} \min_{0\neq x\in W^\perp} -\rho_A(x) &= -\lambda_{n+1-k},\\
\max_{\dim W=k-1} \big(-\max_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x)\big) &= -\lambda_{n+1-k},\\
-\min_{\dim W=k-1} \max_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x) &= -\lambda_{n+1-k},\\
\min_{\dim W=k-1} \max_{0\neq x\in W^\perp} \rho_A(x) &= \lambda_{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Satz 8.3 (Schachtelungssatz für symmetrischen Matrizen)**.** *Seien $A \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, $A^* = A$, $c \in \mathbb{K}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}$, $B := \begin{pmatrix} A & c \\ c^* & d \end{pmatrix}$, $\mu_1 \le \ldots \le \mu_{n-1}$ die Eigenwerte von A und $\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n$ die Eigenwerte von B. Dann gilt für $1 \le k \le n-1$*

$$\lambda_k \le \mu_k \le \lambda_{k+1},$$

daher

$$\lambda_1 \le \mu_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{n-1} \le \mu_{n-1} \le \lambda_n.$$

Beweis. Sei $W := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} w^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} w^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}, e^n\right\}$ wobei $w^1, \ldots, w^{n-1}$ die EV von A zu den EW $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sind. Dann gilt $\dim W = k$, daher gilt nach Satz 8.2

$$\min_{0\neq x\in W^\perp} \rho_B(x) \le \lambda_{k+1}.$$

Wir bestimmen nun $W^\perp$:

$$\begin{aligned}
x \in W^\perp \Leftrightarrow x_n = 0, &\left\langle \begin{pmatrix} w^i \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle = 0 \text{ für } 1 \le i \le k-1\\
\Leftrightarrow x = &\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \langle w^i, y\rangle = 0 \text{ für } 1 \le i \le k-1\\
\Leftrightarrow x = &\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in (\underbrace{\operatorname{span}\{w^1, \ldots, w^{k-1}\}}_{=:V})^\perp.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} \ge \min_{0\neq x\in W^\perp} \rho_B(x) &= \min_{0\neq y\in V^\perp} \rho_B \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\\
&= \min_{0\neq y\in V^\perp} \frac{\begin{pmatrix} y^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & c \\ c^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}{y^* y} = \min_{0\neq y\in V^\perp} \frac{y^* A y}{y^* y}\\
&= \min_{0\neq y\in V^\perp} \rho_A(y) = \mu_k.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\mu_k \le \lambda_{k+1}. \tag{8.2}$$

Die Eigenwerte von $-A$ sind

$$-\mu_{n-1} \le -\mu_{n-2} \le \ldots \le \mu_{n-(n-1)}.$$

Die von $-B$ sind

$$-\lambda_{n+1-1} \leq -\lambda_{n+1-2} \leq \ldots \leq -\lambda_{n+1-n}.$$

Daher ist $-\mu_k = -\mu_{n-(n-k)}$ der $(n-k)$-te EW von $-A$. Dieser ist laut (8.2) kleiner gleich als der $(n-k+1)$-te EW von $-B$, dieser ist $-\lambda_{n+1-(n-k+1)}$ also

$$-\mu_k = -\mu_{n-(n-k)} \leq -\lambda_{n+1-(n-k+1)} = -\lambda_k,$$

und somit gilt $\lambda_k \leq \mu_k$. □

8.2 Positiv definite Matrizen

Taylor-Formel im $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(x_0) + \langle \operatorname{grad} f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H_f(x - x_0) + R_2.$$

Notwendig für lokales Extremum: $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. Hinreichend für lokales Minimum: Hesse-Matrix ist positiv definit.

Definition 8.2.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$.

1. A heißt positiv definit, wenn für alle $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$

$$x^*Ax > 0$$

   gilt.

2. A heißt positiv semidefinit, wenn für alle $x \in \mathbb{K}^n$

$$x^*Ax \geq 0$$

   gilt.

3. A heißt negativ (semi)definit, wenn $-A$ positiv (semi)definit ist.

4. A heißt indefinit, wenn A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Bemerkung 8.2.2. Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn das durch sie induzierte innere Produkt $\langle x, y\rangle_A := x^*Ay$ positiv definit ist.

Proposition 8.2.3. *Sei $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann positiv (semi)definit, wenn T^*AT positiv (semi)definit ist. Insbesondere ist T^*T positiv definit.*

Beweis. $A^* = A$ ist äquivalent zu $(T^*AT)^* = T^*A^*T = T^*AT$. Falls $x^*Ax > 0$ für alle $x \neq 0$, so ist $y^*T^*ATy > 0$ für $Ty \neq 0$ und dies ist äquivalent zu $y \neq 0$, da T regulär ist. Die andere Richtung funktioniert analog, ebenso der Beweis für (semi)definite Matrizen. □

Satz 8.4 (Charakterisierung positiv definiter Matrizen)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *A ist positiv definit.*

2. *Alle Eigenwerte von A sind positiv.*

3. *Alle* $\det A(1:k, 1:k) > 0$ *für* $1 \leq k \leq n$.

4. *Es gibt eine untere Dreiecksmatrix C mit positiven Diagonalelementen, sodass*

$$A = CC^*$$

   „Cholesky-Faktorisierung“.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Sei $U^*AU = D$ die unitäre Diagonalisierung von A. Laut Proposition 8.2.3 ist A genau dann p.d., wenn D positiv definit ist.

$$x^*Dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$$

ist genau dann für alle $x \neq 0$ positiv, wenn alle λ_i positiv sind. Die λ_i sind genau die EW von A.

$(1,2) \Rightarrow (3)$: [1] Sei $y \in \mathbb{K}^k$. Dann ist

$$y^*A^{(k)}y = \begin{pmatrix} y^* & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} > 0$$

für $y \neq 0$, wobei $A^{(k)} = A(1:k, 1:k)$. Also ist $A^{(k)}$ positiv definit, hat daher lauter positive EW (laut $1 \Leftrightarrow 2$) und damit eine positive Determinante. (Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist).

(3) $\Rightarrow$ (4): Da $\det A^{(k)} > 0$, also insbesondere $\det A^{(k)} \neq 0$, gibt es die LR-Zerlegung von A (vgl. Lineare Algebra 1). Sei

$$\begin{aligned} D &:= \operatorname{diag}(r_{11}, \ldots, r_{nn}), \\ \tilde{R} &:= D^{-1}R. \end{aligned}$$

Wir müssen zuerst zeigen, dass alle $r_{ii} \neq 0$. Da

$$A = \begin{pmatrix} A^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{(k)} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{(k)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{(k)}R^{(k)} & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

gilt

$$\begin{aligned} \det A^{(k)} &= \det(L^{(k)}R^{(k)}) = \det L^{(k)} \cdot \det R^{(k)} \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{kk} \end{pmatrix}\right) = 1^k \cdot r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{kk}. \end{aligned}$$

Also ist $r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{kk} > 0$ für $1 \leq k \leq n$. Zusätzlich folgt, alle r_{ii} positiv sind. Somit folgt nun

$$\begin{aligned} A = LR = LDD^{-1}R = LD\tilde{R}, \\ LD\tilde{R} = A = A^* = \tilde{R}^*D^*L^* = \tilde{R}^*DL^*, \end{aligned}$$

da D lauter positive und damit reelle Einträge hat. Es folgt

$$(\tilde{R}^*)^{-1}LD = DL^*(\tilde{R})^{-1},$$

wobei L und $(\tilde{R}^*)^{-1}$ untere Dreiecksmatrizen mit Diagonale 1 sind, L^* und $(\tilde{R})^{-1}$ sind somit obere Dreiecksmatrizen mit Diagonale 1. Da nun links eine untere Dreiecksmatrix und rechts eine obere Dreiecksmatrix steht, sind beides Diagonalmatrizen. $(\tilde{R}^*)^{-1}L = I$, also $L = \tilde{R}^*$ und daraus folgt $\tilde{R} = L^*$ beziehungsweise $A = LDL^*$. Definiere

$$C := L \cdot \underbrace{\operatorname{diag}(\sqrt{r_{11}}, \ldots, \sqrt{r_{nn}})}_{=:\sqrt{D}},$$

das ist eine untere Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale.

$$CC^* = L\sqrt{D}(\sqrt{D})^*L^* = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^* = LDL^* = A.$$

(Geglückt, weil alle $r_{ii} > 0$).

[1] Das folgt auch direkt aus dem Schachtelungssatz 8.3.

(4) $\Rightarrow$ (1): Das folgt aus Proposition 8.2.3 für $T = C^*$, da C lauter positive Diagonalelemente hat und daher regulär ist.

□

Bemerkung 8.2.4. 1. Die Routine „chol" liefert in manchen Programmsystemen den „oberen" Faktor C^*.

2. Punkt (3) des Satzes 8.4 ist für kleines n ein bequeme Möglichkeit zur Überprüfung, ob A positiv definit ist.

3. Diagonal dominante symmetrische Matrizen sind positiv definit.

4. Cholesky-Faktorisierung kann zum Lösen von linearen GLS herangezogen werden:
   - Bestimme $C : A = CC^*$.
   - $Cy = b$ durch Vorwärtseinsetzen lösen.
   - $C^*x = y$ durch Rückwärtseinsetzen lösen.

Auch negativ definite, semidefinite und indefinite Matrizen können durch ihre Eigenwerte charakterisiert werden.

Satz 8.5. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$. Dann gilt*

1. *A ist genau dann positiv semidefinit, wenn $\lambda_1 \geq 0$ (also alle Eigenwerte nicht negativ sind),*

2. *A ist genau dann negativ semidefinit, wenn $\lambda_n \leq 0$ (also alle Eigenwerte nicht positiv sind),*

3. *A ist genau dann negativ definit, wenn $\lambda_n < 0$ (also alle Eigenwerte negativ sind),*

4. *A ist genau dann indefinit, wenn $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ (also es negative und positive Eigenwerte gibt).*

Beweis. als Übung. □

Für negativ definite Matrizen kann man auch eine Charakterisierung über die Hauptminoren angeben:

Korollar 8.2.5. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix und schreibe $A^{(k)} := A(1:k, 1:k)$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt: A ist genau dann negativ definit, wenn* $\det A^{(k)}$ *für alle geraden k positiv und alle ungeraden k negativ ist.*

8.3 Berechnung der Cholesky-Faktorisierung

Gegeben ist A (positiv definit) mit $A^* = A$.
Gesucht ist ein C, sodass $CC^* = A$, wobei C eine untere Dreiecksmatrix ist.
Sei $C = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ mit $c_{ij} = 0$ für $j > i$. Aus $A = CC^*$ folgt

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}C^*(k,j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\overline{c_{jk}} = \sum_{k=1}^{j} c_{ik}\overline{c_{jk}}, \tag{8.3}$$

denn für $k > j$ gilt $\overline{c_{jk}} = 0$. Nehme an, dass die Spalten $1, \ldots, j-1$ von C bereits berechnet wurden. Für $i = j$ gilt

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} c_{jk}\overline{c_{jk}} = \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2 + |c_{jj}|^2$$

und daraus folgt

$$c_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2},$$

was das geforderte positive c_{jj} erzeugt.
Sei jetzt $i > j$. Aus (8.3) folgt

$$\begin{aligned} c_{ij}\overline{c_{jj}} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}\overline{c_{jk}}, \\ c_{ij} &= \frac{1}{c_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}\overline{c_{jk}}\right), \end{aligned}$$

da $c_{jj} > 0$. Hierbei sind alle nötigen Elemente bereits bekannt.

Algorithmus 8.1 Cholesky-Faktorisierung

Gegeben: $A = A^*$
Gesucht: C untere Dreiecksmatrix mit $A = CC^*$ oder Beweis, dass A nicht positiv definit ist.

for $j = 1 : n$ **do**
  $d := a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2$
  if $d \leq 0$ **then**
    return (A ist nicht positiv definit)
  end if
  $c_{jj} := \sqrt{d}$
  for $i = j + 1 : n$ **do**
    $c_{ij} := \frac{1}{c_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}\overline{c_{jk}}\right)$
  end for
end for

Bemerkung 8.3.1.

1. Laufzeit: $\mathrm{O}(n^3)$. A kann überschrieben werden.
2. Das Cholesky-Verfahren ist numerisch günstig. Ein Indiz dafür ist

$$|c_{jk}|^2 \leq \sum_{l=1}^{j} |c_{jl}|^2 = a_{jj}, \tag{8.4}$$

   also $|c_{jk}| \leq \sqrt{a_{jj}}$, die Einträge von C sind also beschränkt.
3. Sei A eine l-Bandmatrix, d.h. $A_{ij} = 0$ für $|j - i| \geq l$. Für $i \geq j + l$ gilt

$$i - k = \underbrace{i - j}_{\geq l} + \underbrace{j - k}_{>0} > l,$$

   und daraus folgt $c_{ik} = 0$ für $k < j$ und somit gilt $c_{ij} = 0$. Also ist der Cholesky-Faktor einer l-Bandmatrix seinerseits eine l-Bandmatrix.

   - Speicherplatz sparen.
   - Innere Schleife $i = j + 1 : j + l - 1$.
   - Summation erst ab $k = j - l + 1$, also höchstens l Summanden.
     Somit haben wir eine Laufzeit von $\mathrm{O}(nl^2)$. Falls l konstant ist, erhalten wir sogar eine Laufzeit von $\mathrm{O}(n)$.
4. Cholesky-Zerlegung ist eindeutig.

8.4 Hadamardsche Ungleichung

Satz 8.6. *Sei $A = A^*$ positiv definit. Dann gilt*

$$0 < \det A \leq a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Gleichheit gilt, wenn C und damit auch A eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n > 0$ ist klar. Aus (8.4) folgt

$$\det A = \det(CC^*) = \det(C)\det(C^*) = c_{11}^2 \cdot \ldots \cdot c_{nn}^2 \leq a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

□

Korollar 8.4.1 (Hadamardsche Ungleichung)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beliebig. Dann gilt*

$$|\det A| \leq \|a^1\|_2 \cdot \ldots \cdot \|a^n\|_2.$$

wobei $a^1, \ldots, a^n$ die Spalten von A sind. Gleichheit gilt genau dann, wenn A eine Nullspalte enthält oder die Spalten von A ein Orthogonalsystem bilden.

Beweis. Falls A regulär, so ist $B := A^*A$ laut Proposition 8.2.3 positiv definit. Aus Satz 8.6 folgt

$$\det B \leq b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn},$$

weiters gilt

$$b_{ii} = A^*(i,:)A(:,i) = (a^i)^* a^i = \|a^i\|_2^2,$$
$$\det B = \det A^*A = \det A^* \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2.$$

Wurzelziehen liefert alles. Falls A singulär ist, gilt $\det A = 0$, und die Aussage ist trivial. □

Kapitel 9

Nichtnegative Matrizen und der Satz von Perron-Frobenius[1]

Notationen für diesen Abschnitt: Seien M, $N \in \mathbb{R}^{r \times s}$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
&M \leq N, && \text{falls } m_{ij} \leq n_{ij} \text{ für alle } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s,\\
&M < N, && \text{falls } m_{ij} < n_{ij} \text{ für alle } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s,\\
&|M| := (|m_{ij}|)_{\substack{1 \leq i \leq r\\ 1 \leq j \leq s}}
\end{aligned}$$

M heißt positiv, falls $M > 0$, und nichtnegativ, falls $M \geq 0$.

9.1 Reduzible und irreduzible Matrizen und deren kombinatorische Deutung

Definition 9.1.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, sodass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

für quadratische Matrizen B_{11} und B_{22} gilt.

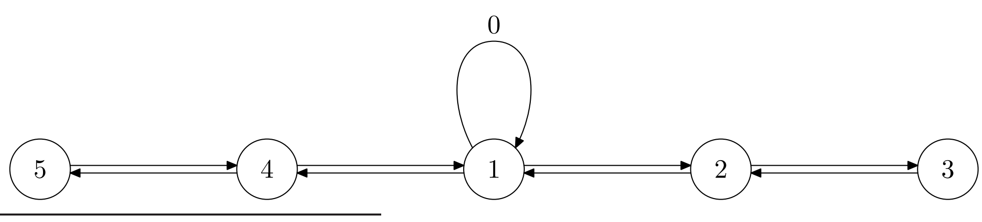
Die Matrix A heißt *irreduzibel*, wenn sie nicht reduzibel ist.

Definition 9.1.2. Sei A eine nichtnegative $(n \times n)$-Matrix. Der zugeordnete gerichtete Graph $\vec{G} = (V, E)$ ist durch $V = \{1, \ldots, n\}$ und $E := \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$ gegeben.

Beispiel 9.1.3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zugeordnete Digraph ist



[1] Dieses Kapitel wurde großteils von Stefan Reiterer nach der Vorlesung im Sommersemester 2005 verfasst.

Lemma 9.1.4. *Eine nichtnegative Matrix ist genau dann irreduzibel, wenn der zugeordnete gerichtete Graph stark zusammenhängend ist.*

Beweis. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A \geq 0$ reduzibel und G der zugehörige gerichtete Graph, dann gibt es laut Definition eine Permutationsmatrix P, sodass P^tAP die Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

hat. Der dieser Matrix zugehörige Graph $\tilde{G}$ ist offensichtlich nicht stark zusammenhängend und durch Umnummerieren der Knoten des A zugehörigen Graphen G entstanden. Die Graphen G und $\tilde{G}$ sind somit isomorph, daher kann auch $\tilde{G}$ nicht stark zusammenhängend sein.

Sei nun G nicht stark zusammenhängend. Dann gibt es von einem Knoten u aus keinen gerichteten Weg zu einem Knoten v. Nummeriere die von u aus erreichbaren Knoten mit $k+1$, $k+2, \ldots,$ n, für geeignetes k. Da zumindest v von u aus nicht erreichbar ist, gilt mit Sicherheit $k \geq 1$. Nenne diesen neu nummerierten Graphen $\tilde{G}$. Nun gibt es eine Permutationsmatrix P, die die zugehörige Matrix A so umnummeriert, dass A die Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$. Diese Matrix ist $\tilde{G}$ zugeordnet, und da man von den Knoten $k+1$ bis n die Knoten 1 bis k nicht erreichen kann, ist der linke untere Teil der Matrix natürlich Null. □

Beispiel 9.1.5 (Fortsetzung von Beispiel 9.1.3). Die Matrix A ist irreduzibel, da der zugeordnete Digraph offensichtlich stark zusammenhängend ist.

Lemma 9.1.6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtnegativ und irreduzibel. Dann gilt*

$$(I + A)^{n-1} > 0.$$

Beweis. Der A zugehörige Graph G ist stark zusammenhängend, d.h. es gibt einen Weg der Länge $\leq n-1$ zwischen je zwei Knoten. Da wir nun aber zu A die Einheitsmatrix dazuaddiert haben, bekommt jeder Knoten von G noch zusätzlich eine Schleife hinzu. Die Einträge von $(A+I)^{n-1}$ sind genau dann > 0, wenn zwischen je zwei Knoten des Graphen ein Weg der Länge $n-1$ existiert, und dies ist hier tatsächlich der Fall, da man bei verfrühter Ankunft in einem der Knoten immer in der Schleife warten kann. □

Beispiel 9.1.7 (Fortsetzung der Beispiele 9.1.3 und 9.1.5). Interpretiert man die Einträge der Matrix A als Wahrscheinlichkeit, von Zustand i nach Zustand j zu kommen (und den fehlenden Rest auf 1 als „Abgleiten in die Illegalität“), so gibt

$$(e^1)^t A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Wahrscheinlichkeit an, bei Start in Knoten 1 nach k Schritten noch im „legalen Bereich“ zu sein.

Um diese Wahrscheinlichkeit asymptotisch berechnen zu können, müssen wir die dominanten Eigenwerte von A kennen.

9.2 Satz von Perron-Frobenius, Erster Teil

Satz 9.1 (Perron-Frobenius, Teil 1)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtnegativ und irreduzibel. Dann ist der Spektralradius $\rho(A)$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 1. Der zugehörige Eigenvektor ist (nach passender Multiplikation mit einem Skalar) positiv.*

Beweis. Setze $\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, x \neq 0\}$ und für $x \in \mathcal{H}$

$$r(x) := \min_{\substack{1\leq i\leq n\\ x_i\neq 0}} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

r ist also eine Funktion von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{R}$. Weiters setze

$$\rho := \sup_{x\in\mathcal{H}} r(x). \tag{9.1}$$

Wir setzen

$$P := (I + A)^{n-1}.$$

Diese Matrix ist nach Lemma 9.1.6 positiv. Weiters gilt

$$\begin{aligned} PA = (A+I)^{n-1}A &= (A+I)^{n-1}(A+I) - (A+I)^{n-1} \\ &= (A+1)(A+I)^{n-1} - (A+I)^{n-1} = (A+I-I)(A+I)^{n-1} = AP, \end{aligned}$$

also

$$AP = PA. \tag{9.2}$$

Lemma 9.2.1. *Es gibt ein $y > 0$ mit $\rho y \leq Ay$.*

Beweis des Lemmas.

1. Behauptung: Es gilt

$$r(x) = \max\{s \in \mathbb{R} : sx \leq Ax\} \text{ für alle } x \in \mathcal{H}. \tag{9.3}$$

Für $1 \leq j \leq n$ gilt $r(x)x_j \leq (Ax)_j$. Außerdem gibt es mindestens ein j, für das Gleichheit gilt. Daraus folgt, dass für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt: $r(x)x \leq Ax$, und bei einigen Einträgen Gleichheit, daraus kann man schließen, dass $r(x)$ nicht mehr erhöht werden darf, und die Behauptung ist damit bewiesen.

2. Für $x \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$r(\alpha x) = \min_{\substack{1\leq j\leq n\\ x_j\neq 0}} \frac{(\alpha Ax)_j}{\alpha x_j} = \min_{\substack{1\leq j\leq n\\ x_j\neq 0}} \frac{(Ax)_j}{x_j} = r(x),$$

also

$$r(\alpha x) = r(x). \tag{9.4}$$

3. Setze $\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\|_2 = 1\}$. $\mathcal{K}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

4. Für alle $z \in \mathcal{H}$ gibt es ein $x \in \mathcal{K}$, sodass $z = \|z\|_2\, x$ gilt. Für ein beliebiges $z \in \mathcal{H}$ gilt nach (9.4)

$$r(z) = r(\|z\|_2\, x) = r(x) \leq \sup_{y\in\mathcal{K}} r(y) \overset{\mathcal{K}\subseteq\mathcal{H}}{\leq} \rho,$$

also gilt $\sup_{y\in\mathcal{K}} r(y) = \rho$.

5. Behauptung: r ist stetig auf $\{x \in \mathcal{H} : x > 0\}$.

   Da alle $x_j > 0$ sind, sind auch alle Brüche von
   $$\frac{(Ax)_j}{x_j}$$
   stetig, und da das Minimum stetiger Funktionen stetig ist, ist auch $r(x)$ stetig auf $\{x \in \mathcal{H} : x > 0\}$.

6. Betrachte $\mathcal{M} := \{Px : x \in \mathcal{K}\}$. Dann ist $\mathcal{M}$ als Bild der kompakten Menge $\mathcal{K}$ unter der stetigen Abbildung P kompakt und eine Teilmenge von $\{y \in \mathbb{R}^n : y > 0\}$.

7. Behauptung: Für alle $x \in \mathcal{K}$ gilt $r(x) \leq r(Px) \leq \rho$.

   Es gilt für beliebiges $x \in \mathcal{K}$
   $$r(x)x \leq Ax,$$
   und weiters gilt
   $$r(x)Px \leq PAx \overset{(9.2)}{=} A(Px).$$
   Für jedes $x \in \mathcal{K}$ gilt nun wegen der Maximalität von $r(Px)$, dass
   $$r(x) \leq r(Px). \tag{9.5}$$

8. Laut (9.5) gilt nun für beliebiges $x \in \mathcal{K}$:
   $$r(x) \leq r(Px) \leq \sup_{y \in \mathcal{M}} r(y) \overset{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}}{\leq} \rho.$$

9. Es gilt $\sup_{x \in \mathcal{K}} r(x) \leq \sup_{x \in \mathcal{K}} r(Px) \leq \rho$, also $\rho = \sup_{y \in \mathcal{M}} r(y)$.

10. Da $\mathcal{M}$ kompakt und r stetig auf $\mathcal{M}$ ist, wird das Maximum angenommen. Es gibt daher ein $x^0 \in \mathcal{K}$, sodass $r(Px^0) = \max_{z \in \mathcal{M}} r(z)$ ist, und $y := Px^0 > 0$ erfüllt nach voriger Überlegung $r(y) = \rho$ und damit $\rho y \leq Ay$. Das war zu zeigen.

□

Lemma 9.2.2. *Gilt für ein $x \geq 0$, $x \neq 0$, dass $\rho x \leq Ax$, so folgt $\rho x = Ax$ und $x > 0$.*

Beweis des Lemmas. Für den ersten Teil nehmen wir an, dass $Ax - \rho x \neq 0$. Dann ist der Vektor $P(Ax - \rho x)$ positiv, da P positiv ist. Wegen (9.2) folgt $P(Ax - \rho x) = A(Px) - \rho(Px)$, es gibt somit ein $\delta > 0$ mit $A(Px) \geq (\rho + \delta)(Px)$, was ein Widerspruch zur Maximalität von ρ ist. Somit gilt $Ax = \rho x$, also ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert ρ von A. Damit ist x auch ein Eigenvektor zum Eigenwert $(\rho + 1)^{n-1}$ von P, woraus
$$x = \frac{1}{(\rho + 1)^{n-1}} Px > 0$$
folgt. □

Lemma 9.2.3. *Sei x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A. Dann gilt $|\lambda| \leq \rho$. Falls zusätzlich $|\lambda| = \rho$ gilt, so ist $|x|$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ρ von A und es gilt $|x| > 0$.*

Beweis des Lemmas. Aus $Ax = \lambda x$ folgt nach Dreiecksungleichung
$$|\lambda| \cdot |x| \leq |A| \cdot |x|, \tag{9.6}$$
also nach (9.3) und (9.1) die Ungleichung $|\lambda| \leq r(|x|) \leq \rho$.

Falls $|\lambda| = \rho$, so folgt aus (9.6) und Lemma 9.2.2, dass $|x|$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ρ ist und $|x| > 0$. □

Aus Lemma 9.2.1 und Lemma 9.2.2 folgt, dass ρ ein Eigenwert von A mit positivem Eigenvektor ist. Daraus folgt $\rho \leq \rho(A)$. Andererseits folgt aus Lemma 9.2.3, dass $\rho(A) \leq \rho$, somit gilt $\rho = \rho(A)$ und es gibt einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$ von A.

Lemma 9.2.4. *$\rho(A)$ hat geometrische Vielfachheit 1 als Eigenwert von A.*

Beweis des Lemmas. Seien x und y zwei linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\rho(A)$. Nach Lemma 9.2.3 gilt $|x| > 0$ und $|y| > 0$. Wir setzen $z := y_1 x - x_1 y$. Da x und y linear unabhängig sind und $x_1 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$, ist auch $z \neq 0$ und daher ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\rho(A)$. Daraus folgt $|z| > 0$ nach Lemma 9.2.3, das ist aber ein Widerspruch zu $z_1 = y_1 x_1 - x_1 y_1 = 0$. □

Lemma 9.2.5. *$\rho(A)$ hat algebraische Vielfachheit 1 als Eigenwert von A.*

Beweis des Lemmas. Nach Lemma 9.2.4 besitzt A nur einen Jordanblock zum Eigenwert $\rho(A)$. Außerdem besitzen A und A^t (das ebenfalls eine irreduzible nichtnegative Matrix ist) nach Lemma 9.2.1 und Lemma 9.2.2 jeweils einen positiven Eigenvektor x bzw. y, also

$$(A - \rho(A)I)x = 0, \qquad y^t(A - \rho(A)I) = 0.$$

Falls die algebraische Vielfachheit von $\rho(A)$ größer als 1 ist, so gibt es einen Vektor z mit $(A - \rho(A)I)z = x$. Es folgt

$$0 < y^t x = y^t(A - \rho(A)I)z = 0z = 0,$$

ein Widerspruch. □

Damit ist auch Satz 9.1 vollständig bewiesen. □

9.3 Drehungsinvarianz von Eigenwerten

Satz 9.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nichtnegativ und irreduzibel und A habe genau k Eigenwerte mit Betrag $\rho(A)$. Dann sind diese Eigenwerte durch*

$$e^{2\ell\pi i/k}\rho(A), \qquad 0 \leq \ell < k$$

gegeben. Sie haben alle algebraische Vielfachheit 1.

Das Spektrum von A ist invariant unter Rotation um $2\pi/k$.

Beweis. Es sei λ ein Eigenwert von A mit $\rho(A) = |\lambda|$ und $x \neq 0$ der zugehörige Eigenvektor. Nach Lemma 9.2.3 ist $|x|$ ein positiver Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$ von A.

Wir setzen nun $D := \operatorname{diag}(|x_1|/x_1, \ldots, |x_n|/x_n)$, weshalb die Beziehungen $|x| = Dx$ und $x = D^{-1}|x|$ gelten. Es gilt

$$AD^{-1}|x| = Ax = \lambda x = \lambda D^{-1}|x|,$$

woraus durch Multiplikation von links mit D

$$DAD^{-1}|x| = \lambda|x| = \frac{\lambda}{\rho(A)}\rho(A)|x| = \frac{\lambda}{\rho(A)}A|x|$$

folgt. Wir erhalten somit

$$\left(\frac{\rho(A)}{\lambda}DAD^{-1} - A\right)|x| = 0. \tag{9.7}$$

Wir bemerken, dass $|\frac{\rho(A)}{\lambda}DAD^{-1}| = A$, weil es sich bei den Multiplikationen mit den Diagonalmatrizen D beziehungsweise D^{-1} und der Multiplikation mit $\rho(A)/\lambda$ jeweils um Multiplikation der Elemente um gewisse komplexe Zahlen mit Betrag 1 handelt. Somit handelt es sich bei

$(\frac{\rho(A)}{\lambda}DAD^{-1} - A)$ um eine Matrix, deren Realteile alle nichtpositiv sind. Daher folgt aus (9.7), dass alle diese Realteile gleich 0 ist (weil ja $|x| > 0$). Somit muss aber

$$A = \frac{\rho(A)}{\lambda} DAD^{-1} \tag{9.8}$$

gelten. Die Matrix DAD^{-1} ist ähnlich zu A und hat damit dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten wie A. Bei Multiplikation mit $\rho(A)/\lambda$ werden diese Eigenwerte samt ihren algebraischen[2] und geometrischen Vielfachheiten mit $\rho(A)/\lambda$ multipliziert.

Seien nun die Zahlen $0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_k < 2\pi$ so gewählt, dass $\lambda_\ell = e^{i\varphi_\ell}\rho(A)$ für $1 \le \ell \le k$ gilt, wobei die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ genau die k Eigenwerte von A mit Absolutbetrag $\rho(A)$ sind.

Wir betrachten jetzt ein ein beliebiges $1 \le j \le k$. Dann gibt es eine positive ganze Zahl m, sodass $m\varphi_2 \le \varphi_j < (m+1)\varphi_2$. Setzen wir $\lambda = \lambda_2 = e^{i\varphi_2}\rho(A)$ im ersten Teil des Beweises und wenden diesen m mal an, so sehen wir, dass auch

$$e^{-m\varphi_2 i}\lambda_j = e^{(\varphi_j - m\varphi_2)i}\rho(A)$$

ein Eigenwert von A ist. Da aus der Wahl von m folgt, dass $0 \le \varphi_j - m\varphi_2 < \varphi_2$, muss $\varphi_j - m\varphi_2 = 0$ gelten, da ja alle von $\rho(A)$ verschiedenen Eigenwerte ein Argument von mindestens φ_2 haben. Wir schließen daraus, dass alle φ_j gewisse Vielfache von φ_2 sind. Da (wiederum nach dem ersten Teil des Beweises) mit $e^{m\varphi_2 i}\rho(A)$ auch $e^{(m-1)\varphi_2 i}\rho(A)$ ein Eigenwert von A ist, muss $\varphi_2 = 2\pi/k$ gelten. Daraus folgt die geforderte Gestalt der λ_j. Durch (9.8) wird auch die algebraische Vielfachheit 1 des Eigenwertes $\rho(A)$ auf alle übrigen Eigenwerte desselben Absolutbetrages übertragen.

Aus (9.8) folgt dann auch sofort die Drehungsinvarianz. □

9.4 Primitive Matrizen

Definition 9.4.1. Eine nichtnegative Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *primitiv*, wenn sie irreduzibel ist und genau einen Eigenwert mit Betrag $\rho(A)$ hat.

Satz 9.3 (Perron-Frobenius, Teil III)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \ge 0$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist primitiv.*
2. *Es existiert ein $p_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $p \ge p_0$ gilt: $A^p > 0$.*
3. *Es existiert ein $p \in \mathbb{N}_0$, sodass $A^p > 0$.*

Beweis. (1) ⇒ (2): A ist primitiv, also ist A irreduzibel. Nach Satz 9.1 ist $\rho(A)$ ein Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit 1. Daraus folgt $A^p = s^1(t^1)^t\rho^p(A) + O(r^p)$, wobei $t^1 = T(:,1)$ und $s^1 = T^{-1}(1,:)$ sind, und T die Transformationsmatrix zur Jordanzerlegung von A ist. Weiters gilt, dass $J(1,1) = (T^{-1}AT)(1,1) = \rho(A)$ ist. Daraus folgt $J^t(1,1) = (T^tA^t(T^{-1})^t)(1,1) = \rho(A)$, und daher $A^ts^1 = \rho(A)s^1$, also ist s^1 Eigenvektor zum Eigenwert $\rho(A)$ von A^t, und nach Satz 9.1 gilt dann $s^1 > 0$, und damit $s^1(t^1)^t > 0$. Da weiters $\rho(A) > |r|$ gilt, wird irgendwann der vordere den hinteren Teil „überholen“, und damit gilt $A^{p_0} > 0$ für ein passendes $p_0 \in \mathbb{N}$.

(2) ⇒ (3): trivial.

(3) ⇒ (1): Da $A^p > 0$ ist, gibt es auf dem A zugehörigen Graphen G, zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge p, daraus folgt, dass G stark zusammenhängend ist, also ist A nach

[2] Sei B eine Matrix und $0 \ne \omega \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\det(\omega B - zI) = \omega^n \det(B - (z/\omega)I)$, d.h., λ ist genau dann ein Eigenwert von ωB, wenn λ/ω ein Eigenwert von B ist. Dabei bleiben die algebraischen Vielfachheiten gleich.

Lemma 9.1.4 irreduzibel. A habe k verschiedene Eigenwerte mit Absolutbetrag $\rho(A)$, diese haben nach Satz 9.2 die Gestalt $\lambda_j = \rho(A)e^{i\frac{2\pi j}{k}}$. Für die Eigenwerte von A^{kp} gilt dann

$$\lambda_j^{kp} = (\rho(A)e^{i\frac{2\pi j}{k}})^{kp} = (\rho^k(A) \cdot 1)^p = \rho^{kp}(A).$$

A^{kp} hat demnach den k-fachen Eigenwert $\rho^{kp}(A)$. Daraus folgt nach Satz 9.1 $k = 1$, also ist A primitiv.

□

Korollar 9.4.2 (Satz von Perron)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A > 0$. Dann ist A primitiv.*

Bemerkung 9.4.3. Es gilt $A^p > 0$ genau dann, wenn je zwei Knoten des Digraphen durch einen Kantenzug der Länge p verbindbar sind.

Beispiel 9.4.4 (Fortsetzung der Beispiele 9.1.3, 9.1.5 und 9.1.7)*.* Es gibt von jedem Knoten einen Weg nach 1 in höchstens 2 Schritten sowie einen Weg von 1 zu jedem Knoten in höchstens 2 Schritten. Daher gibt es zwischen je zwei Knoten einen Kantenzug der Länge ≤ 4 über den Knoten 1. Außerdem gibt es eine Schleife bei 1. Daher gibt es zwischen je zwei Knoten einen Kantenzug der Länge 4, also gilt $A^4 > 0$ und somit ist A primitiv.

Bemerkung 9.4.5. Ist der einer nichtnegativen Matrix zugeordnete Digraph stark zusammenhängend und enthält er mindestens eine Schleife, so ist die Matrix primitiv.

Teil IV

Singulärwertzerlegung

Kapitel 10

Singulärwertzerlegung

10.1 Definition, Existenz und einfache Eigenschaften

In Kapitel 6: Eigenwerte von quadratischen Matrizen (sind eine Art von „skalarer Kenngröße“ der Matrix). Was ist mit rechteckigen Matrizen? $Ax = \lambda x$ ist nur für quadratischen Matrizen sinnvoll.

In Kapitel 3: Haben über- bzw. unterbestimmte Gleichungssysteme „$Ax = b$“ betrachtet. Damals war Voraussetzung, dass A vollen Rang hat. Was tun, wenn dies nicht der Fall ist?

In Kapitel 1: Matrizennormen $\|A\|_p$ eingeführt. $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ ausgerechnet (Spalten- bzw. Zeilensummennorm). $\|A\|_2$ können wir bis jetzt nicht berechnen.

Versuche nun diese Probleme zu lösen, wobei wir mit letzterem beginnen. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Da für unitäre Matrizen $\|U^*AV\|_2 = \|A\|_2$ gilt (Proposition 4.2.8), suchen wir unitäre Matrizen U und V, sodass $U^*AV = S$ in möglichst einfacher Form ist, nämlich in Diagonalform. Dass dies immer möglich ist, zeigt folgender Satz.

Definition 10.1.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, die Matrizen $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ seien unitär, und $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei eine Matrix mit

$$s_{ij} = \begin{cases} \sigma_i, & \text{wenn } 1 \le i = j \le \mu, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für gewisse $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_\mu \ge 0$, wobei $\mu = \min(m, n)$. Wenn $U^*AV = S$, so heißt (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A; die σ_i heißen Singulärwerte.

Satz 10.1 (Existenz einer Singulärwertzerlegung)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann besitzt A eine Singulärwertzerlegung (U, S, V).*

Beweis. 1. Wir betrachten den Fall $m = 1$, also $A = (a^*)$ für ein $a \in \mathbb{K}^n$.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|a^*x\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} |\langle a, x\rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \max_{\|x\|_2=1} \|a\|_2\|x\|_2 = \|a\|_2.$$

Gleichheit in Cauchy-Schwarzer Ungleichung gilt für $x = \frac{1}{\|a\|_2}a$.

$$A = \underbrace{1}_{\text{unitär}} \underbrace{(\|a\|, 0, \dots, 0)}_{1\times n \text{ Diagonalmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\|a\|}a^* \\ V \end{pmatrix}}_{\in n\times n \text{ unitär}} .$$

2. Nun betrachten wir den Fall $n = 1$, also $A = a$.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|ax\|_2 = \max_{|x|=1} |x| \cdot \|a\|_2 = \|a\|_2,$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{\|a\|_2} & \tilde{U} \end{pmatrix}}_{m\times m \text{ unitär}} \underbrace{\begin{pmatrix} \|a\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{m\times 1 \text{ Diagonalmatrix}} \underbrace{1}_{n\times n \text{ unitär}}.$$

3. Allgemeiner Fall: $m \geq 2, n \geq 2$. Wir setzen $\sigma_1 := \|A\|_2$. Es existiert ein $v \in \mathbb{K}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$, sodass $\|Av\|_2 = \sigma_1$ gilt. Daher ist $Av = \sigma_1 u$ mit $u \in \mathbb{K}^m$. Aus

$$\sigma_1 = \|Av\|_2 = \|\sigma_1 u\|_2 = |\sigma_1| \cdot \|u\|_2$$

folgt, dass u normiert ist. Wir ergänzen v zu einer unitären $n \times n$ Matrix $\begin{pmatrix} v & V \end{pmatrix}$. Ebenfalls wird u zu einer unitären $m \times m$ Matrix $\begin{pmatrix} u & U \end{pmatrix}$ ergänzt. Wir schreiben nun die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ bezüglich dieser Basen.

$$\begin{pmatrix} u^* \\ U^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*Av & u^*AV \\ U^*Av & U^*AV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 u^*u & w^* \\ \sigma_1 U^*u & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & B \end{pmatrix} =: C.$$

Da $\|AQ\|_2 = \|A\|_2$ und $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ für unitäres Q, folgt $\|C\|_2 = \|A\|_2 = \sigma_1$. Betrachte $C\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + w^*w \\ * \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \|C\|_2 &\geq \frac{\left\| C\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix} \right\|_2} = \frac{\sqrt{(\sigma_1^2 + w^*w)^2 + |\quad|^2 + \cdots + |\quad|^2}}{\sqrt{(\sigma_1^2 + w^*w)}} \\ &\geq \frac{\sigma_1^2 + w^*w}{\sqrt{\sigma_1^2 + w^*w}} = \sqrt{\sigma_1^2 + w^*w} \geq \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1. \end{aligned}$$

Daher gilt überall Gleichheit, also $w^*w = 0$, also $\|w\|_2 = 0$, also $w = 0$. Sei $x \in \mathbb{K}^{n-1}$ mit $\|x\|_2 = 1$, dann gilt

$$\left\| C\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right\|_2 = \|Bx\|_2.$$

Und daraus folgt

$$\|B\|_2 = \max_{x\in\mathbb{K}^{n-1}, \|x\|_2=1} \|Bx\|_2 \leq \sigma_1.$$

Wir können also durch Multiplikation mit (im Allgemeinen) verschiedenen unitären Matrizen A auf die Gestalt $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ bringen, wobei $\sigma_1 = \|A\|_2$ und $\|B\|_2 \leq \sigma_1$.
Iterativ: A wird übergeführt in

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_\mu \end{pmatrix},$$

mit $\mu := \min(m, n)$ und $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_\mu \geq 0$.

□

Proposition 10.1.2. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A, $\mu = \min(m, n)$, $U = (u^1, \ldots, u^m)$, $V = (v^1, \ldots, v^n)$. Dann gilt:*

1. $Av^i = \sigma_i u^i$ *für* $1 \le i \le \mu$,

2. $\sigma_1 = \|A\|_2$,

3. $A = \sum\limits_{i=1}^{\mu} \sigma_i u^i (v^i)^*$,

4. $A^*A = VS^*SV^* = V \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_\mu^2, 0 \dots, 0)V^*$, *daraus folgt:* $\sigma_1^2, \dots, \sigma_\mu^2, 0 \dots, 0$ *sind die Eigenwerte von* A^*A. *Die Vektoren* $v^1, \dots, v^n$ *bilden eine Orthonormalbasis von EV von* A^*A.

5. $\|A\|_2 = \sqrt{\max(\sigma(A^*A))}$.

6. $AA^* = USS^*U^*$, *also sind* $\sigma_1^2, \dots, \sigma_\mu^2, 0, \dots, 0$ *die Eigenwerte von* AA^*, *die Vektoren* $u^1, \dots, u^m$ *bilden die zugehörige Orthonormalbasis von EV.*

7. $\|A\|_2 = \sqrt{\max(\sigma(AA^*))}$.

Beweis. 1.

$$AV = US, \quad (Av^1, \dots, Av^\mu) = (u^1, \dots, u^m) \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_\mu) = (\sigma_1 u^1, \dots, \sigma_\mu u^\mu).$$

2.

$$U^*AV = S \Rightarrow \|A\|_2 = \|S\|_2, \quad \|S\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Sx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\sigma_i x_i|^2} = \sigma_1.$$

3.

$$A = USV^* = U \begin{pmatrix} \sigma_1 (v^1)^* \\ \vdots \\ \sigma_\mu (v^\mu)^* \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 u^1 (v^1)^* + \ldots + \sigma_\mu u^\mu (v^\mu)^*.$$

□

Korollar 10.1.3. *Die Singulärwerte* $\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_\mu$ *sind eindeutig bestimmt, d.h., sie hängen nur von* A *und nicht der speziellen Singulärwertzerlegung von* A *ab.*

10.2 Anwendungen der Singulärwertzerlegung

In diesem Abschnitt sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$, $\mu = \min(m, n)$, $r = \max\{i : \sigma_i > 0\}$ und (U, S, V) eine Singulärwertzerlegung von A. Die Spalten von U bzw. V werden mit $u^1, \dots, u^m$ bzw. $v^1, \dots, v^n$ bezeichnet.

10.2.1 Über- und unterbestimmte Gleichungssysteme

Sei $M := \{x \in \mathbb{K}^n : \|Ax - b\|_2 \text{ minimal}\}$. Suche ein $x \in M$, sodass $\|x\|_2 = \min\limits_{y \in M} \|y\|_2$. Das ist also eine gemeinsame Verallgemeinerung des Konzepts über- bzw. unterbestimmter Gleichungssysteme.

$$\begin{aligned}
\|Ax - b\|_2^2 &= \|U^*(Ax - b)\|_2^2 \\
&= \|U^*Ax - U^*b\|_2^2 \\
&= \|U^*AVy - U^*b\|_2^2 \\
&= \|Sy - U^*b\|_2^2 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r \\ 0 \end{pmatrix} - U^*b \right\|_2^2 \\
&= \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r \end{pmatrix} - (U^*b)(1:r) \right\|_2^2}_{\text{das kann minimiert werden}} + \underbrace{\|(U^*b)(r+1:m)\|_2^2}_{\text{konstant}}.
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Setze also $y_1 = \frac{1}{\sigma_1}(U^*b)_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}(U^*b)_r$, denn diese Wahl minimiert $\|Ax - b\|_2$. $y_{r+1}, \ldots, y_n$ können beliebig gewählt werden. Da $\|x\|_2 = \|Vy\|_2 = \|y\|_2$, ist $\|x\|_2$ genau dann minimal unter allen Vektoren aus M, wenn $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$,

$$\begin{aligned}
y &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1}(U^*b)_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_r}(U^*b)_r \\ 0 \end{pmatrix}, \\
y &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{=: S^+ \in \mathbb{K}^{n \times m}} U^*b, \\
x &= VS^+U^*b.
\end{aligned}$$

Definition 10.2.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und U, S, V die Singulärwertzerlegung von A, $r := \max\{i : \sigma_i > 0\}$. S^+ sei jene $(n \times m)$-Matrix mit Einträgen

$$(S^+)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & i = j \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann heißt $A^+ := VS^+U^*$ die Pseudoinverse von A.

Satz 10.2 (über- bzw. unterbestimmte Gleichungssysteme via Pseudoinverser)**.** *Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$, A^+ eine Pseudoinverse von A. Dann gibt es genau einen Vektor, der minimale Norm unter allen Vektoren, die $\|Ax - b\|_2$ minimieren, hat, nämlich $x = A^+b$.*

Beweis. siehe Vorüberlegungen □

Korollar 10.2.2. *Die Pseudoinverse ist eindeutig.*

Beweis. Setze $b = e^1, \ldots, e^m$ nacheinander ein, dann sind die entsprechenden Spalten von A^+ als eindeutige Lösung des über- bzw. unterbestimmten Gleichungssystems „$Ax = e^i$“ eindeutig bestimmt. $\square$

10.2.2 Kern, Bild, Rang

Wir bestimmen das Bild von A. Ein Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ ist laut (10.1) genau dann im Bild von A, wenn $(U^*b)(r+1 : m) = 0$ gilt, was zu $b \in \operatorname{span}\{u^{r+1}, \ldots, u^m\}^\perp = \operatorname{span}\{u^1, \ldots, u^r\}$ äquivalent ist.

Um den Kern von A zu beschreiben, setzen wir $b = 0$ in (10.1) ein und sehen, dass $x \in \operatorname{Ker} A$ äquivalent zu $(V^*x)(1 : r) = 0$ ist. Somit ist $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{v^{r+1}, \ldots, v^n\}$.

Proposition 10.2.3. *Es gilt*

- $\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\{v^{r+1}, \ldots, v^n\}$
- $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{u^1, \ldots, u^r\}$
- $\operatorname{rank} A = r$

Die angegebenen Basen sind jeweils Orthonormalbasen.

10.2.3 Numerischer Rang

Was tun, wenn σ_r klein ist?
Soll es eigentlich einer 0 entsprechen und damit Rang von $A < r$, oder ist σ_r „absichtlich positiv“?

Satz 10.3. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_\mu$, $\mu := \min(m,n)$, $r = \operatorname{rank} A$. Für $0 \leq k < r$ gilt*

$$\min_{\substack{B \in \mathbb{K}^{m\times n} \\ \operatorname{rank} B = k}} \|A - B\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Beweis. Sei $U^*AV = S$ eine Singulärwertzerlegung. $A = USV^* = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i u^i (v^i)^*$ mit $\sigma_r > 0$. A hat laut Annahme Rang r. Möchte A ein wenig „verwackeln“, sodass der Rang auf k abfällt. Versuch $C = \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i u^i (v^i)^* \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$C = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V^*.$$

Laut Proposition 10.2.3 gilt $\operatorname{rank} C = k$.

$$A - C = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_k & & & \\ & & & \sigma_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_r \end{pmatrix} V^* - U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} V^*$$

$$= \underbrace{U}_{\text{unitär}} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \sigma_{k+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \underbrace{V^*}_{\text{unitär}}$$

$$\|A - C\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \sigma_{k+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Bis jetzt haben wir bewiesen: $\min\limits_{\operatorname{rank} B = k} \|A - B\|_2 \leq \sigma_{k+1}$. Sei jetzt B eine Matrix vom Rang k, dann folgt daraus nach der Dimensionsformel, dass

$$\dim \operatorname{Ker} B = n - \operatorname{rank} B = n - k$$

und daher

$$\underbrace{\operatorname{span}\{v^1, \dots, v^{k+1}\}}_{\dim k+1} \cap \underbrace{\operatorname{Ker} B}_{\dim n-k} \neq \{0\},$$

sonst wäre $\operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{span}\{v^1, \dots, v^{k+1}\}$ direkte Summe der Dimension $(n-k)+(k+1) = n+1 > n$, Widerspruch. Daher gibt es ein $0 \neq z \in \ker B \cap \operatorname{span}\{v^1, \dots, v^{k+1}\}$ mit $\|z\|_2 = 1$. Also gilt $Bz = 0$. Wir erhalten

$$\|A - B\|_2 \geq \|(A - B)z\|_2 = \|Az - Bz\|_2 = \|Az\|_2 = \|USV^*z\|_2 = \|SV^*z\|.$$

Setzen wir nun $V^*z = y$, was zu $z = Vy$ äquivalent ist. Nach der Voraussetzung über z muss $y(k+2:n) = 0$ gelten. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|A - B\|_2^2 &\geq \|Sy\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |y_i|^2 \geq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} |y_i|^2 = \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \sigma_{k+1}^2 \|y\|_2 \\ &= \sigma_{k+1}^2 \|V^*z\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2 \|z\|_2^2 = \sigma_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\min_{\operatorname{rank} B = k} \|A - B\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

(Das Minimum wird tatsächlich angenommen). □

Auch aus diesem Satz folgt

Korollar 10.2.4. *Die Singulärwerte einer Matrix sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Formel in Satz 10.3 gibt basisfreien (also unabhängig von U, V) Ausdruck für σ_{k+1} für $0 \leq k \leq r - 1$, die übrigen sind wegen Satz 10.2 ohnehin 0. □

Bemerkung 10.2.5. U, V sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

10.2.4 Konditionszahl

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dann gilt für reguläres A

$$\kappa_2(A) = \underbrace{\|A\|_2}_{\sigma_1} \cdot \|A^{-1}\|_2.$$

Um die Singulärwerte von A^{-1} zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A &= USV^*, \\ A^{-1} &= (USV^*)^{-1} = (V^*)^{-1} S^{-1} U^{-1} = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} U^*. \end{aligned}$$

Somit hat A^{-1} die Singulärwerte $\frac{1}{\sigma_1} \leq \ldots \leq \frac{1}{\sigma_n}$, und somit ist $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$.

Proposition 10.2.6. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Dann gilt*

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}.$$

Beweis. Für reguläres A siehe oben. Für singuläres A gilt definitionsgemäß $\kappa_2(A) = \infty$. Da $\operatorname{rank} A \leq n-1$, folgt $\sigma_n = 0$ und somit $\frac{\sigma_1}{0} =$ „∞“. □

10.2.5 Bildkompression

Ein Graustufenbild aus $m \times n$ Pixel kann man als Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ auffassen, wobei der Grauwert jedes Pixels in den entsprechenden Eintrag der Matrix geschrieben wird. Speichert man die volle Matrix, so werden mn Einheiten Speicherplatz verbraucht. Wir schreiben A als Singulärwertzerlegung.

$$A = USV^* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u^i (v^i)^* \approx \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u^i (v^i)^*.$$

Wähle nun k angemessen, benötige nun

$$k + km + kn = k(m+n+1)$$

„Einheiten“ Speicherplatz. Es gibt allerdings bessere Kompressionsverfahren.

Teil V

Ergänzungen

Kapitel 11

Eigenwertabschätzungen

11.1 Sensitivität von Eigenwerten

geg.: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \triangle A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Frage: Wie stark weichen Eigenwerte von $A + \triangle A$ von A ab?

Satz 11.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar, $T^{-1}AT = D \ldots$Diagonalmatrix, $\triangle A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \mu \in \sigma(A + \triangle A)$. Dann gilt*

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\mu - \lambda| \leq \kappa_p(T) \|\triangle A\|_p,$$

wobei $1 \leq p \leq \infty$. ($\kappa_p(T) = \|T^{-1}\|_p \cdot \|T\|_p$ wie in Abschnitt 2.1).

Beweis. Falls $\mu \in \sigma(A)$, so ist nichts zu zeigen. Nehme also $\mu \notin \sigma(A)$ an. $A - \mu I$ ist regulär. $A + \triangle A - \mu I$ ist singulär. $(A - \mu I)(I + (A - \mu I)^{-1} \triangle A)$ ist singulär, also

$$0 = \det((A - \mu I)(I + (A - \mu I)^{-1} \triangle A)) = \underbrace{\det(A - \mu I)}_{\neq 0} \det(\underbrace{I + (A - \mu I)^{-1} \triangle A}_{\text{ist singulär}}).$$

Laut Lemma 2.2.2 ist $(I - B)$ regulär, falls $\|B\| < 1$. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
1 &\leq \|(A - \mu I)^{-1} \triangle A\|_p \\
&\leq \|(TDT^{-1} - \mu TT^{-1})^{-1}\|_p \cdot \|\triangle A\|_p \\
&= \|(T(D - \mu I)T^{-1})^{-1}\|_p \cdot \|\triangle A\|_p \\
&= \|T(D - \mu I)^{-1}T^{-1}\|_p \cdot \|\triangle A\|_p \\
&\leq \|(D - \mu I)^{-1}\|_p \underbrace{\|T\|_p \cdot \|T^{-1}\|_p}_{=\kappa_p(T)} \cdot \|\triangle A\|_p \\
&= \left\| \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1 - \mu}, \frac{1}{\lambda_2 - \mu}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n - \mu} \right) \right\|_p \kappa_p(T) \|\triangle A\|_p,
\end{aligned}$$

falls $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Muss nur noch die Norm einer Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ ausrechnen.

$$\begin{aligned}\|\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)\|_p &= \max_{\|x\|_p=1} \|(d_1x_1,\dots,d_nx_n)^t\|_p\\ &= \max_{\|x\|_p=1} \sqrt[p]{|d_1x_1|^p+\ldots+|d_nx_n|^p}\\ &\le \max_{\|x\|_p=1} \sqrt[p]{(\max_i |d_i|^p)(|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p)}\\ &= \max_{i=1,\dots,n}|d_i| \underbrace{\max_{\|x\|_p=1}\|x\|_p}_{1}.\end{aligned}$$

Wenn $\max\limits_{i=1,\dots,n}|d_i| = |d_{i_0}|$ für ein passendes i_0, so gilt für $x = e^{i_0}$ Gleichheit. Also folgt

$$\|\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)\| = \max_{i=1,\dots,n}|d_i|,$$

setzt man dies nun oben ein, erhält man

$$1 \le \max_{i=1,\dots,n}\frac{1}{|\lambda_i-\mu|}\kappa_p(T)\|\triangle A\|_p = \frac{1}{\min\limits_{i=1,\dots,n}|\lambda_i-\mu|}\kappa_p(T)\|\triangle A\|_p.$$

$\square$

Korollar 11.1.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, $\triangle A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \mu \in \sigma(A+\triangle A)$. Dann gilt*

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)}|\mu-\lambda| \le \|\triangle A\|_2.$$

Beweis. Aus A normal folgt, dass ein U unitär existiert, sodass $U^*AU = D\ldots$diagonal. $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, also ist auch $\|U\|_2 = 1$. $U^{-1} = U^*$ unitär, also gilt $\|U^*\|_2 = \|U^{-1}\|_2 = 1$ und schließlich gilt somit $\kappa_2(U) = 1$. $\square$

Beispiel 11.1.2.

$$A = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

$$A+\triangle A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ x & & & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}P_{A+\triangle A}(t) &= \begin{vmatrix} -t & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ x & & & -t\end{vmatrix}\\ &= -t\begin{vmatrix} -t & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & -t\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}x\begin{vmatrix} 1 & & & 0\\ -t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -t & 1\end{vmatrix}\\ &= -t(-t)^{n-1} + (-1)^{n+1}x = (-1)^n(t^n - x).\end{aligned}$$

λ ist ein Eigenwert von $A + \triangle A$ genau dann wenn $\lambda^n - x = 0$, und daraus folgt $\lambda_k = e^{2k\pi i/n}\sqrt[n]{x}$ (aufgrund komplexer Nullstellen) für $0 \leq k < n$. Abstand zwischen EW λ_k von $A + \triangle A$ und dem EW 0 von A ist $\sqrt[n]{x}$. Sei $x = 10^{-16}, n = 16$. Fehler im EW: 0.1.

Bemerkung 11.1.3. Bei nicht-diagonalisierbaren Matrizen können EW „unendlich"-schlecht konditioniert sein.

Frage: Ist $\sqrt[n]{}$ schon das allerschlechteste?

Satz 11.2. *Seien $A, \triangle A \in \mathbb{C}^{n\times n}, U^*AU = D + N$ die Schur-Zerlegung, also U unitär, D diagonal, N obere Dreiecksmatrix mit Diagonale 0, $r \in \mathbb{N}$, sodass $|N|^r = 0$ (wobei $|N| \ldots$Matrix der Absolutbeträge), $\mu \in \sigma(A + \triangle A)$, dann gilt*

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\mu - \lambda| \leq \max(\theta, \theta^{1/r}),$$

wobei $\theta = \|\triangle A\|_2 \sum_{k=0}^{r-1} \|N\|_2^k$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 11.1 gilt

$$1 \leq \|(A - \mu I)^{-1}\|_2 \cdot \|\triangle A\|_2.$$

Weiters erhalten wir

$$\begin{aligned}\|(A - \mu I)^{-1}\|_2 &= \|(U(D + N)U^* - \mu UU^*)^{-1}\|_2 = \|U((D - \mu I) + N)^{-1}U^*\|_2\\ &\leq \|(D - \mu I + N)^{-1}\|_2.\end{aligned}$$

Da A und $D + N$ ähnlich sind, gilt $\sigma(A) = \sigma(D + N)$. Da $D + N$ eine obere Dreiecksmatrix ist, stehen die EW von $D + N$ auf der Diagonale. $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Da $\mu \neq \lambda_i$, ist $D - \mu I$ regulär, also

$$\begin{aligned}\|(D - \mu I + N)^{-1}\|_2 &= \|((D - \mu I)(I + (D - \mu I)^{-1}N)^{-1}\|_2\\ &\leq \|(I + (D - \mu I)^{-1}N)^{-1}\|_2 \cdot \underbrace{\|(D - \mu I)^{-1}\|_2}_{=:\delta}.\end{aligned}$$

Falls N von der geforderten Gestalt ist und $|N|^r = 0$ und E eine Diagonalmatrix ist, so gilt $(EN)^r = 0$:

$$\begin{aligned}0 = |N|^r_{ij} &= \sum_{l_1,\ldots,l_{r-1}} \underbrace{|n_{il_1}| \cdot |n_{l_1l_2}| \cdots |n_{l_{r-1}j}|}_{=0}.\\ (EN)^r_{ij} &= \sum_{l_1,\ldots,l_{r-1}} \underbrace{e_i n_{il_1} e_{l_1} n_{l_1l_2} e_{l_2} n_{l_2l_3} \ldots e_{l_{r-1}} n_{l_{r-1}j}}_{=0}.\end{aligned}$$

Endliche geometrische Reihe: $(I - B^r) = (I - B)(I + B + \cdots + B^{r-1})$. Für $B = (D - \mu I)^{-1}N$ gilt $B^r = 0$, also

$$I = (I - B)(\underbrace{I + B + \cdots + B^{r-1}}_{(I-B)^{-1}}).$$

Zusammen:

$$\begin{aligned}1 &\leq \|\triangle A\|_2\delta \sum_{k=0}^{r-1} (\underbrace{\|(D - \mu I)^{-1}\|_2}_{\delta} \cdot \|N\|_2)^k\\ &= \|\triangle A\|_2\delta \sum_{k=0}^{r-1} \delta^k \|N\|_2{}^k\\ &\leq \underbrace{\|\triangle A\|_2 \sum_{k=0}^{r-1} \|N\|_2{}^k}_{\theta} \max(\delta, \delta^r).\end{aligned}$$

Also: $1 \leq \theta\delta$ oder $1 \leq \theta\delta^r$. Daraus folgt nun

$$\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda - \mu| = \frac{1}{\delta} \leq \max(\theta, \sqrt[r]{\theta}).$$

$\square$

Frage: Bleiben algebraische Vielfachheiten bei Verwackelung erhalten?

Satz 11.3. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \lambda$ ein EW von A mit algebraischer Vielfachheit μ, und $\epsilon > 0$ gegeben, wobei in $\overline{S}(\lambda, \epsilon)$ keine weiteren EW von A liegen. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|B - A\| < \delta$ die Anzahl der Eigenwerte von B in $S(\lambda, \epsilon)$ gleich μ ist (Anzahl = Summe der algebraischen Vielfachheiten).*

Lemma 11.1.4. *Sei P ein Polynom, $\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon > 0$ so, dass in $\partial S(\lambda, \epsilon)$ keine Nullstellen von P liegen. Dann ist die Anzahl der Nullstellen von P in $S(\lambda, \epsilon)$ gleich*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial S(\lambda,\epsilon)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \begin{pmatrix} z = \lambda + \epsilon e^{i\phi} \\ dz = i\epsilon e^{i\phi} d\phi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(\lambda + \epsilon e^{i\phi})}{P(\lambda + \epsilon e^{i\phi})} \epsilon e^{i\phi} d\phi.$$

Beweis des Satzes. $f(z, B) = \det(B - zI)$ ist Polynom in B, z. Aufgrund der Wahl von ϵ hat $f(z, B)$ für $z \in \partial S(\lambda, \epsilon)$ und $B = A$ keine Nullstelle. Die stetige Funktion $z \mapsto |f(z, A)|$ nimmt auf der kompakten Menge $\partial S(\lambda, \epsilon)$ ihr Minimum $m > 0$ an. Da f in $\overline{z \in \partial S(\lambda, \epsilon), B \in S(A, \rho)}$ (für ein $\rho > 0$) gleichmäßig stetig ist, gibt es ein δ_1, sodass für alle $B \in S(A, \rho)$ und $z \in \partial S(\lambda, \epsilon)$ die Abschätzung $|f(B, z) - f(A, z)| < m/2$, also $f(z, B) \neq 0$ gilt. $f'(z, B)$ ist gleichmäßig stetig ebendort, und somit auch $\frac{f'(z,B)}{f(z,B)}$. Es gilt

$$\left| \frac{f'(z, B)}{f(z, B)} - \frac{f'(z, A)}{f(z, A)} \right| < \frac{1}{2\epsilon}$$

für $\|A - B\| < \delta$ und ein passendes $\delta > 0$.

$$\begin{aligned} |\text{Anzahl der Nullstellen von } B \text{ in } S(\lambda, \epsilon) - \mu| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{f'(z, B)}{f(z, B)} - \frac{f'(z, A)}{f(z, A)} \right) \epsilon e^{i\phi} d\phi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\epsilon} \epsilon d\phi = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da obige Zahlen ganz sind und sich höchstens um $1/2$ unterscheiden, sind sie gleich. $\square$

Beweisskizze des Lemmas. Sei

$$P(z) = z(z - \lambda_1)^{\mu_1} \ldots (z - \lambda_r)^{\mu_r}.$$

Dann gilt

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\mu_1}{z - \lambda_1} + \cdots + \frac{\mu_r}{z - \lambda_r}.$$

Für $1 \leq k \leq r$ betrachten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\lambda + \epsilon e^{i\phi} - \lambda_k} \epsilon e^{i\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\phi}}{\frac{\lambda - \lambda_k}{\epsilon} + e^{i\phi}} d\phi.$$

Fall 1: $\frac{|\lambda-\lambda_k|}{|\epsilon|} < 1$, also $\lambda_k \in S(\lambda,\epsilon)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{\lambda-\lambda_k}{\epsilon}e^{-i\phi}}_{|\ |<1}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\lambda_k-\lambda}{\epsilon}\right)^l e^{-il\phi}d\phi = 1.$$

Fall 2: $\frac{|\lambda-\lambda_k|}{|\epsilon|} > 1$, also $\lambda_k \notin \overline{S}(\lambda,\epsilon)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\lambda+\epsilon e^{i\phi}-\lambda_k}\epsilon e^{i\phi}d\phi &= \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{\lambda-\lambda_k}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\phi}}{1-\left(\frac{\epsilon}{\lambda_k-\lambda}\right)e^{i\phi}}d\phi\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{2\pi}\left(\frac{\epsilon}{\lambda_k-\lambda}\right)^l\int_0^{2\pi}e^{il\phi}d\phi = 0.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{P'(\lambda+\epsilon e^{i\phi})}{P(\lambda+\epsilon e^{i\phi})}\epsilon e^{i\phi}d\phi = \sum_{\substack{k\\ \lambda_k\in S(\lambda,\epsilon)}}\mu_k.$$

□

Satz 11.4. *Sei $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ und $\epsilon>0$. Dann gibt es ein $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|A-B\|<\epsilon$, sodass B n verschiedene Eigenwerte besitzt. (Daher liegt die Menge der Matrizen mit verschiedenen Eigenwerten dicht im $\mathbb{C}^{n\times n}$).*

Bemerkung 11.1.5. Damit liegen die diagonalisierbaren Matrizen ebenfalls dicht im $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Beweis. Sei $U^*AU = D+N$ die Schur-Zerlegung von A (U unitär, $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, N strikte obere Dreiecksmatrix), $A=U(D+N)U^*$. Wähle $0<\delta<1$ so, dass $\delta < \min\limits_{\lambda\neq\lambda'\in\sigma(A)}|\lambda-\lambda'|$. Sei $E:=\operatorname{diag}(\delta,\delta^2,\dots,\delta^n)$.
Annahme: $E+D=\operatorname{diag}(\lambda_1+\delta,\lambda_2+\delta^2,\dots,\lambda_n+\delta^n)$ habe zwei gleiche Diagonalelemente, also $\lambda_k+\delta^k=\lambda_l+\delta^l$ für gewisse $k<l$. Dann gilt

$$0<\lambda_k-\lambda_l=\delta^k-\delta^l=\underbrace{\delta^k}_{>0}(\underbrace{1-\delta^{l-k}}_{>0})\le\delta<\min_{\lambda\neq\lambda'\in\sigma(A)}|\lambda-\lambda'|.$$

Widerspruch zur Annahme. Also hat $D+E$ lauter verschiedene Eigenwerte. $D+E+N$ hat die selben Eigenwerte, ebenso $B:=U(D+E+N)U^*$

$$\begin{aligned}\|A-B\|_2 &= \|U((D+N)-(D+E+N))U^*\|_2\\ &\le \|U\|_2\cdot\|E\|_2\cdot\|U^*\|_2\le\|E\|_2=\delta.\end{aligned}$$

Wähle $\delta<\min(1,\epsilon,\min\limits_{\lambda\neq\lambda'\in\sigma(A)}|\lambda-\lambda'|)$. □

11.2 Eigenwertabschätzungen

Satz 11.5 (Geršgorin)**.** *Sei $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Setze*

$$\overline{S_i}:=\overline{S}\left(a_{ii},\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\right)$$

für $1\le i\le n$. Dann gilt:

1. $\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}$

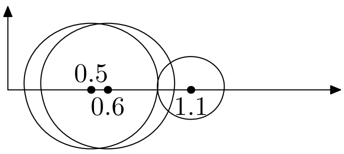
2. Falls für ein $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$$\bigcup_{i \in I} \overline{S_i} \cap \bigcup_{i \notin I} \overline{S_i} = \emptyset$$

gilt, so enthält $\bigcup_{i \in I} \overline{S_i}$ *genau* $|I|$ *Eigenwerte von* A *(mit Vielfachheiten gezählt).*

Beispiel 11.2.1.

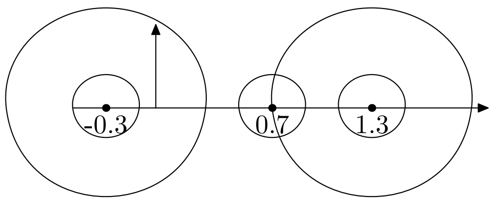
$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$



alle EW liegen in den Kreisscheiben, alle Realteile sind somit positiv.

Beispiel 11.2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$



Somit liegt genau ein Eigenwert in $\overline{S}(-0.3, 0.2)$ und genau zwei Eigenwerte in $\overline{S}(1.3, 0.6) \cup \overline{S}(0.7, 0.2)$. Da $\sigma(A) = \sigma(A^t)$, kann ich Geršgorin auch spaltenweise anwenden. Somit liegt ein Eigenwert in $\overline{S}(-0.3, 0.2)$, einer in $\overline{S}(0.7, 0.2)$ und einer in $\overline{S}(1.3, 0.2)$.

Beweis. 1. Sei $\lambda \in \sigma(A)$, x zugehöriger Eigenvektor mit $\|x\|_\infty = 1$. Sei $x_i = 1$. Es gilt $Ax = \lambda x$, die i-te Zeile sieht also wie folgt aus $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$

$$|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda - a_{ii}) x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Und somit ist $\lambda \in \overline{S_i}$.

2. Sei $A = D + E$, $D \ldots$Diagonalmatrix, $E \ldots$Diagonale 0. Für $0 \leq t \leq 1$ sei $A_t = D + tE$, $A_0 = D$, $A_1 = A$. Es gilt

$$\sigma(A_0) = \{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$$

und für

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A_t) \cap \bigcup_{i \in I} \overline{S_i}} \mu(\lambda)$$

gilt $f(0) = |I|$. Die Kreisscheiben

$$\overline{S_{i,t}} := \overline{S} \left(a_{ii}, t \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)$$

sind die Geršgorin-Kreise für A_t. Setze

$$\rho := \frac{1}{3} d(\bigcup_{i \in I} \overline{S_i}, \bigcup_{i \notin I} \overline{S_i}) > 0.$$

$f(t)$ ist definiert auf $[0, 1]$.
Behauptung: f ist stetig. Sei $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein δ, sodass für $|t - s| < \delta$ die EW inklusive Vielfachheiten von A_t und A_s sich um höchstens ρ unterscheiden.

Falls λ ein EW von A_t mit algebraischer Vielfachheit μ und $\lambda \in \bigcup_{i\in I} \overline{S_{i,t}}$ gilt, gibt es $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ (inklusive Vielfachheiten) EW von A_s mit $|\lambda - \eta_k| < \rho$ falls $|s - t| < \delta$ für ein passendes δ (Satz 11.3). Da $d\left(\bigcup_{i\in I} \overline{S_{i,t}}, \bigcup_{i\notin I} \overline{S_{i,t}}\right) > 3\rho$ folgt $\mu_k \notin \bigcup_{i\notin I} \overline{S_{i,s}}$. Aus Teil 1 folgt $\eta_k \in \bigcup_{i\in I} \overline{S_{i,s}}$ und daraus folgt wiederum $f(s) = f(t)$ für $|s - t| < \delta$. Daher ist f stetig auf $[0, 1]$ mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$, also ist f konstant. Also gilt

$$f(1) = f(0) = |I|.$$

$\square$

Definition 11.2.3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft

$$a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Dann heißt A diagonal dominant.

Korollar 11.2.4. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und diagonal dominant, dann sind alle Eigenwerte von A positiv und A ist positiv definit.*

Literaturverzeichnis

[1] James W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997. MR 98m:65001

[2] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix computations*, third ed., Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996. MR 97g:65006

[3] Serge Lang, *Linear algebra*, Second edition, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1971. MR 43 #3276

[4] Ben Noble and James W. Daniel, *Applied linear algebra*, third ed., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1988.

[5] Gilbert Strang, *Linear algebra and its applications*, second ed., Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. MR 81f:15003

[6] Lloyd N. Trefethen and David Bau, III, *Numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997. MR 98k:65002