Beispiele für die 2. Klausur zur Linearen Algebra 2 von C. Heuberger
Termin: 21.6.2010 um 17:00 in der Steyrergasse 30 HS P

1. Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die folgende drei Eigenschaften hat:

   (a) $Av_1 = 0$ mit $v_1 = (1,1,1)^t$.

   (b) Die Folge $(A^n v_2)_{n\geq 0}$ ist konstant für $v_2 = (1,1,0)^t$.

   (c) Die Folge $(A^n v_3)_{n\geq 0}$ ist unbeschränkt für $v_3 = (1,0,0)^t$, doch die Folge $(\frac{1}{n}A^n v_3)_{n\geq 0}$ ist konvergent.

Musterlösung:
1. Lösung: Ohne Basistransformation und ohne Jordanform, nur genaue Beachtung, was die drei Bedingungen über die Matrixelemente von A aussagen.
Wegen (b) (mit $n=0$ und $n=1$) und (a) müssen die Elemente von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} &= 1, & a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 0 \\ a_{21} + a_{22} &= 1, & a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 0 \\ a_{31} + a_{32} &= 0, & a_{31} + a_{32} + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Setzt man aus den linken Gleichungen in die rechten ein, so ergeben sich die Elemente der dritten Spalte $a_{13} = -1$, $a_{23} = -1$, $a_{33} = 0$. Mit $a := a_{12}$, $b := a_{22}$, $c := a_{32}$ liefern die linken Gleichungen die Elemente der ersten Spalte $a_{11} = 1-a$, $a_{21} = 1-b$, $a_{31} = -c$ und somit ist $A = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ 1-b & b & -1 \\ -c & c & 0 \end{pmatrix}$. Also gilt $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-a\\1-b\\-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d.h. $Av_3 = v_2 - w$, wenn $w := (a,b,c)^t$. Aus (c) folgern wir, dass es gut wäre, wenn

$$A^2 v_3 = A(Av_3) = A(v_2 - w) = v_2 + (v_2 - w)$$

wäre, d.h. wenn $A(-w) = v_2 - w$ wäre. Dann wäre nämlich

$$A^3 v_3 = A(A^2 v_3) = A(v_2 + (v_2 - w)) = 2v_2 + A(-w) = 3v_2 - w$$

und somit (leicht ersichtlich) $A^n v_3 = nv_2 - w$, also $(A^n v_3)_{n\geq 0}$ unbeschränkt und $(\frac{1}{n}A^n v_3)_{n\geq 0}$ gegen v_2 konvergent. Die Bedingung $A(-w) = v_2 - w$ liefert

$$A(-w) = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ 1-b & b & -1 \\ -c & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\-b\\-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

bzw. die Gleichungen

$$\begin{aligned} -(1-a)a - ab + c &= 1-a \\ -(1-b)a - b^2 + c &= 1-b \\ ac - bc &= -c, \end{aligned}$$

aus welchen (falls $c \neq 0$) von unten her $b = 1+a$ und $c = 1+a$ folgt. Damit haben wir alle Matrizen A bestimmt, die unsere Aufgabe im Fall $c \neq 0$ lösen:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ -a & 1+a & -1 \\ -1-a & 1+a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt $A^n v_3 = nv_3 - w$, wobei $w = (a,b,c)^t = (a, 1+a, 1+a)^t$ ist.

Setzen wir speziell $a = 0$, (d.h. $b = c = 1$), so sieht die Matrix wie folgt aus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach obigem ist $w = (a, b, c)^t = (0, 1, 1)$ und ein einfacher Induktionsbeweis zeigt $A^n v_3 = n \cdot v_2 - w$ und damit ist die Aufgabe gelöst.
Für Interessierte untersuchen wir auch noch die Fälle, wo $c = 0$ ist. Dann müssen a und b den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -a + a^2 - ab &= 1 - a \\ -a + ab - b^2 &= 1 - b \end{aligned}$$

genügen. Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert $(b-a)^2 = b-a$, d.h. $b-a = 0$ oder $b - a = 1$. Für $a = b$ bekommen wir die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ 1-a & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

die keine Lösung unserer Aufgabe sind, wie man sich leicht überzeugt. Für $b = 1 + a$ und $a \neq 0$ bekommen wir aber lauter Lösungen, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & -1 \\ -a & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Bemerkt sei noch, dass die Matrizen der zweiten und dritten Lösung genau von diesem Typ mit $a = -1$ und $b = 0$ sind.

Bem: Die Idee zu diesem Lösungsweg schimmert bei einigen Teilnehmern durch, wurde aber nicht erfolgreich umgesetzt.

2. Lösung: Mit Theorie und einer zu A ähnlichen Jordanmatrix J.
Wegen (c) kann A nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix sein. A muss ähnlich zu einer Jordanmatrix J sein. Wegen (a) ist $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert von A und v_1 ein zugehöriger Eigenvektor. Wegen (b) gilt $A^1 v_2 = A^0 v_2 = v_2$, d.h. $\lambda_2 = 1$ ist ein Eigenwert von A und v_2 ein zugehöriger Eigenvektor. Da A zu keiner Diagonalmatrix ähnlich sein darf, kann es keinen dritten von 0 und 1 verschiedenen Eigenwert geben, es muss also 0 oder 1 ein mehrfacher Eigenwert von A sein. Als zu A ähnliche Jordanmatrizen kommen im wesentlichen also nur

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Frage. Da $J'^n = J'^2$ für alle $n \geq 2$, kommt nur die Jordanmatrix J für unser Problem in Frage. Die Form von J legt es nahe, dass wir $Av_3 = v_2 + v_3$ von unserer Matrix A fordern damit (c) erfüllt wird. Dann ist nämlich $A^2 v_3 = A(Av_3) = A(v_2 + v_3) = Av_2 + Av_3 = v_2 + v_2 + v_3 = 2v_2 + v_3$ und im weiteren $A^n v_3 = nv_2 + v_3$, wie wir es uns wünschen. Wir suchen also eine Matrix A, die

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Dies ist eine Matrixgleichung, die sofort gelöst werden kann, da die Matrix T invertierbar ist. Es ergibt sich

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Probe ergibt

$$TJT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Bem: Dieser Lösungsweg wurde von einigen erfolgreich beschritten. Die Argumentation für einzelne Schritte war nicht leicht nachzuvollziehen. Ich hatte den Eindruck, dass hier Intuition und Glück gepaart waren. Auch wurde bei einigen weder T^{-1} noch die Matrix A berechnet, es wurde nur der Weg dorthin angedeutet (Zeitmangel!).

3. Lösung: Kenntnis der graphischen Darstellunng einer Scherung und anschließende Basistransformation.
Wir betrachten drei linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ im Raum und eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit

$$(\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_1)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A'}.$$

(Es ist dabei nicht notwendig diese Vektoren bezüglich der Standardbasis richtig zu zeichnen. In der Skizze scheinen $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ selbst eine ON-Basis zu suggerieren., was aber unwesentlich ist.) Durch lineare Fortsetzung auf den ganzen Raum ist damit eine lineare Abbildung definiert. Wir visualisieren nun die entscheidenen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \varphi(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{o}, \varphi(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2, \varphi(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2$, $\varphi^2(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_2$, und $\varphi^3(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_2$.

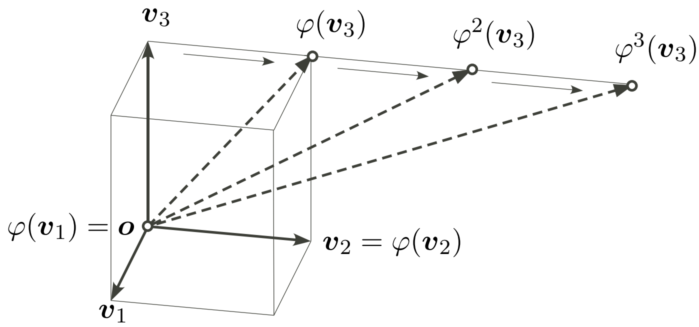

Abbildung 1: Scherung in der $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$-Ebene

Diese Abbildung hat offensichtlich die gewünschten Eigenschaften (a), (b) und (c). Die Matrix von φ bezüglich der Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ ist A'. In der Aufgabe ist aber die Angabe der Matrix A von φ bzgl. der Standardbasis $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ gefragt, daher brauchen wir die Darstellung jeder der beiden Basen durch die andere. Es gilt laut Angabe

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:T}$$

und somit

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=T^{-1}}.$$

Dann ist die Matrix von φ bzgl. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ gegeben durch

$$A = TA'T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bem: Einen anschaulichen Zugang zur Lösung der Aufgabe hat niemand gesucht.