Musterlösung zum Beispiel 4 der 1.Klausur zur LinAlg2 SS 2010

Bsp 4: Es seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $\|\boldsymbol{b}\|_2 = \beta$ und $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|_2 = \gamma$.
(a) Zeige, dass $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))$ ein Orthogonalsystem ist.
(b) Drücke die Längen dieser drei Vektoren durch β und γ aus.
Begründe in beiden Fällen verbal oder führe Rechnungen gemäß der in der Vorlesung hergeleiteten Rechenregeln aus.
1. Lösung: Wir stützen uns auf die folgenden Grundtatsachen über das Kreuzprodukt. Für alle $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \text{ und } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{b}, & & & \qquad (1)\\ \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} & \quad \Rightarrow & \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|, & \qquad (2)\\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ lin. unabh.} & \quad \Rightarrow & \|\boldsymbol{a}\| \neq \boldsymbol{o} \neq \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| & \qquad (3) \end{aligned}$$

Seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lin. unabh. und

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &:= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{v} &:= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{w} &:= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \big(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\big). \end{aligned}$$

Die folgende Beweisvariante benützt (b) zum Beweis von (a). Wir zeigen also zuerst (b). Wegen (3) ist $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \gamma > 0$ und wegen (1) ist $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{u}$. Also gilt wegen (2) $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| = \alpha\gamma > 0$ und zusätzlich wegen (1) $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} (= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}!)$. Somit folgt gemäß (2), dass $\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| = \gamma \cdot \alpha\gamma = \alpha\gamma^2 > 0$. Damit ist die Aufgabe (b) gelöst und wir haben erkannt, dass $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ erfüllen also die erste Eigenschaft für ein Orthogonalsystem. Da wegen (1) aber auch $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}$ gilt, bilden $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ ein Orthogonalsystem. Damit ist auch die Aufgabe (a) gelöst.
2. Lösung: Eine mehr geometrisch verbale Beweisführung sieht etwa so aus.
(a) Nach Definition der Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ und (1) folgt, dass die Vektoren paarweise aufeinander orthogonal stehen, aber wir wissen noch nicht, ob jeder von ihnen ungleich dem Nullvektor ist. Da $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ lin. unabh. sind, folgt aber wegen (3), dass zumindest $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ ist. Wenn wir nun beachten, dass dann $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}$ auch lin. unabh. sind - also speziell $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}$ lin. unabh. sind -, dann ist wieder gemäß (3) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ sind lin. unabhängig. Auf die selbe Weise schließen wir, dass $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ ist und $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}.\boldsymbol{w}$ lin. unabh. sind. Da also die Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen und linear unabhängig sind, bilden sie ein Orthogonalsystem.
(b) Selbe Idee wie in der 1. Lösung.
Bem: Am meisten Aufmerksamkeit und Überlegung benötigt die Aussage, dass keiner der drei Vektoren der Nullvektor ist. Dies ist fast allen Teilnehmern entgangen, bzw. nicht explizit erwähnt worden.