98. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ definiert man die zugehörige Permutationsmatrix P_π als

$$P_\pi = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}),$$

wobei die $e_1, \dots, e_n$ wie üblich die Standardbasis des K^n sind.

(a) Zeigen Sie, dass für $\sigma, \pi \in S_n$ die zugehörigen Permutationsmatrizen die Gleichung $P_\sigma P_\pi = P_{\sigma\circ\pi}$ erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass $\det P_\pi = \operatorname{sign}\pi$ gilt.

(c) Sei $A \in K^{n\times n}$. Beschreiben Sie, was die Multiplikation einer Matrix A mit einer Permutationsmatrix P_π von links bzw. von rechts bewirkt.

Lösung. Wir benutzen die Iverson-Notation

$$[\mathit{expr}] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathit{expr} \text{ wahr ist,} \\ 0, & \text{wenn } \mathit{expr} \text{ falsch ist.} \end{cases}$$

Das ist also eine Variante des Kronecker-Deltas, es gilt $\delta_{ij} = [i = j]$.

Damit ist $e_k = ([j = k])_{1\le j\le n}$ und

$$P_\pi = ([i = \pi(j)])_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}.$$

1. Es gilt

$$\begin{aligned} P_\sigma P_\pi &= \left(\sum_{j=1}^{n} [i = \sigma(j)][j = \pi(k)]\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} = ([i = \sigma(\pi(k))])_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} \\ &= ([i = \sigma\circ\pi(k)])_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} = P_{\sigma\circ\pi}. \end{aligned}$$

2. Nach der Leibnizschen Determinantenformel gilt

$$\det P_\pi = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{n} [i = \pi(\sigma(i))] = \operatorname{sign}\pi^{-1},$$

weil nur jener Summand mit $i = \pi(\sigma(i))$ für alle i ungleich 0 ist. Wegen $\operatorname{sign}\pi^{-1} = \operatorname{sign}\pi$ folgt die Behauptung.

3. Die Matrix A habe die Zeilen $a_1, \dots, a_n$ und die Zeilen $b_1^t, \dots, b_n^t$. Wir berechnen (via Matrizenblockmultiplikation)

$$\begin{aligned} P_\pi A &= ([i = \pi(j)])_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} (a_j)_{1\le j\le n} = \left(\sum_{j=1}^{n} [i = \pi(j)] a_j\right)_{1\le i\le n} \\ &= (a_{\pi^{-1}(i)})_{1\le i\le n}, \end{aligned}$$

es werden also die Zeilen von A entsprechend π^{-1} permutiert.

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} AP_\pi &= (b_i)^t_{1\le i\le n} ([i = \pi(j)])_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i [i = \pi(j)]\right)^t_{1\le j\le n} \\ &= (b_{\pi(j)})^t_{1\le j\le n}, \end{aligned}$$

es werden also die Spalten von A entsprechend π permutiert.

□