1. Lösen Sie folgende Rekursionen:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+2} a_{n-1}$ für $n > 0$ mit $a_0 = 1$,

   (b) $a_n = a_{n-1} + (-1)^n n$ für $n > 0$ mit $a_0 = 1$,

   (c) $na_n = (n-2)a_{n-1} + 2$ für $n > 1$ mit $a_1 = 1$,

   (d) $na_n = (n-4)a_{n-1} + 12nH_n$ für $n > 4$ mit $a_n = 0$ für $n \leq 4$ (wobei $H_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$),

   (e) $n(n-1)a_n = (n-1)a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$ mit $a_1 = 1$ und $a_0 = 1$,

   (f) $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$ für $n > 0$ und $a_0 = 0$,

   (g) $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ für $n > 0$ und allgemeines a_0 (Hinweis: $a_n = b_n + 1/b_n$)

   (h) $a_n = 1/(1 + a_{n-1})$ für $n > 0$ mit $a_0 = 1$,

2. Zeigen Sie, dass $a_n \sim \frac{c}{n}$ für ein passendes c, wobei

$$a_n = a_{n-1}(1 - a_{n-1}) \text{ für } n > 0 \text{ mit } a_0 = 1/2.$$

3. Man bestimme $[z^n]$ für die folgenden erzeugenden Funktionen:
$$\frac{1}{(1-3z)^4}, \qquad (1-z)^2 \log\frac{1}{1-z}, \qquad \frac{1}{(1-2z^2)^2}.$$

4. Man bestimme die erzeugende Funktion für
$$\left(\sum_{0<k<n} \frac{1}{k(n-k)}\right)_{n>1}.$$

5. Unter Verwendung der Notation $H_n^{[2]} := \sum_{k=1}^n 1/k^2$ bestimme man $[z^n]$ für die erzeugenden Funktionen
$$\frac{1}{1-z}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^2, \qquad \left(\log\frac{1}{1-z}\right)^3.$$

6. Bestimmen Sie die Varianz der Anzahl der Vergleiche bei Quicksort explizit (unter Verwendung der bereits bestimmten erzeugenden Funktionen aus der Vorlesung).

7. Man bestimme die EGF der folgenden Folgen:
$$(2^{k+1})_{k\geq 0}, \qquad (k2^{k+1})_{k\geq 0}, \qquad (k^3)_{k\geq 0}.$$

8. Sei $A(z)$ die exponentiell-erzeugende Funktion der Folge a_k. Man bestimme die exponentiell-erzeugende Funktion der Folge
$$\left(\sum_{0\leq k\leq N} N!\frac{a_k}{k!}\right)_{N\geq 0}.$$

9. Sei $A(z)$ die exponentiell-erzeugende Funktion der Folge a_k. Man zeige, dass die gewöhnliche erzeugende Funktion durch
$$\int_0^\infty A(zt)e^{-t}\,dt$$
gegeben ist, falls das Integral existiert.

10. Man löse die Rekursion
$$a_n = 11a_{n-2} - 6a_{n-3} \qquad \text{für } n>2 \text{ mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = a_2 = 1$$
mittels erzeugender Funktionen.

11. Man löse die Rekursion
$$a_n = -\sum_{1\leq k\leq t}\binom{t}{k}(-1)^k a_{n-k} \text{ für } n\geq t \text{ mit } a_0 = \cdots = a_{t-2} = 0 \text{ und } a_{t-1} = 1,$$
wobei t konstant ist.

12. Leiten Sie eine Identität für Binomialkoeffizienten aus
$$(1+z)^r(1-z)^s = (1-z^2)^s(1+z)^{r-s}$$
(mit $r>s$) her.

13. Die Folge f_n besitzt die exponentiell-erzeugende Funktion $e^{z+z^2/2}$. Zeigen Sie, dass f_n der Rekursion $f_n = f_{n-1} + (n-1)f_{n-2}$ genügt.

14. Bestimmen Sie alle Potenzreihen $f(z)$, die der Funktionalgleichung

$$f(z) = e^z f\left(\frac{z}{2}\right)$$

genügen.

15. Man zeige:

$$\frac{1}{1-z} = \prod_{k \geq 0} (1 + z^{2^k}).$$

Geben Sie eine ähnliche Identität an, in der Dreierpotenzen statt Zweierpotenzen verwendet werden.

16. Man bestimme $[z^n]A(z)$ für die Potenzreihe $A(z)$ mit

$$z = \frac{A(z)}{1 - A(z)}.$$

17. Wir betrachten die Anzahl jener Knoten in einem binären Baum der Ordnung n, deren beide Kinder beide Blätter sind. Man bestimme Erwartungswert und Varianz.

18. Man bestimme einen asymptotischen Ausdruck für die N-te harmonische Zahl H_N bis zu einem Restglied von $O(N^{-4})$ (ohne Verwendung der Tabellen).

19. Man bestimme asymptotische Ausdrücke für die erwartete Anzahl von Vergleichen in Quicksort sowie für die Varianz mittels Singularity Analysis.

20. Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten in der asymptotischen Entwicklung von

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{n^k}\right),$$

wobei

$$e_k = \sum_{\ell=k}^{2k} \lambda_{k,\ell} (\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-\ell)$$

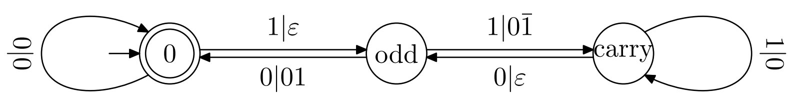
und

$$\lambda_{k,\ell} = [v^k t^\ell] e^t (1+vt)^{-1-1/v}$$

erfüllen.

21. Sei X_N eine gleichverteilte Zufallsvariable auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathsf{NAF}(n)$ die nonadjacent-form von n, i.e., die eindeutige Binärentwicklung $n = \sum_j \varepsilon_j 2^j$ mit $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$ und $\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} = 0$ für alle j.

   - Man erkläre, wie man $\mathsf{NAF}(n)$ vermittels des Transducer Automaton



     aus der Standard-Binärentwicklung $\mathsf{binary}(n)$ von n erhalten kann.
   - Man benutze dies, um eine erzeugende Funktion

$$G(y,z) = \sum_{N \geq 0} \sum_{0 \leq n < 2^N} y^{\mathsf{weight}(\mathsf{NAF}(n))} z^N$$

     zu erhalten, wobei $\mathsf{weight}(\varepsilon_{\ell-1} \ldots \varepsilon_0) = \#\{j : \varepsilon_j \neq 0\}$.
   - Man bestimme $\mathbb{E}(\mathsf{weight}(\mathsf{NAF}(X_N)))$ sowie $\mathrm{Var}(\mathsf{weight}(\mathsf{NAF}(X_N)))$.
   - Jetzt bestimme man eine erzeugende Funktion

$$G(x,y,z) = \sum_{N \geq 0} \sum_{0 \leq n < 2^N} x^{\mathsf{weight}(\mathsf{binary}(n))} y^{\mathsf{weight}(\mathsf{NAF}(n))} z^N.$$

   - Damit bestimme man *für konstantes k*

$$\mathbb{E}(\mathsf{weight}(\mathsf{NAF}(X_N)) \mid \mathsf{weight}(\mathsf{binary}(X_N)) = k).$$

22. Man zeige

$$[z^n] \cos\left(\mathrm{Log}\, \frac{1}{1-z}\right) = \frac{P(\log n)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

wobei $P(u)$ eine stetige 2π-periodische Funktion ist.

23. Man zeige, dass

$$\mathrm{Re}\, \frac{1}{z} \,\mathrm{Log}\, \frac{1}{1-z} > 0$$

für alle $z \in D_1(0)$.

24. Man bestimme
$$[z^n]\sqrt{\frac{1+2z}{1-2z}}$$
asymptotisch.

25. Man bestimme
$$[z^n]\binom{3n}{n}$$
asymptotisch über die Sattelpunktmethode.

26. Man bestimme die ersten 3 Terme der asymptotischen Entwicklung von
$$\frac{1}{n!}$$
über die Sattelpunktmethode.

27. Man bestimme asymptotisch die Anzahl der Involutionen von n Elementen (eine Involution ist eine Permutation $\pi \in S_n$ mit $\pi^2 = \mathrm{id}$). (EGF, Sattelpunkt).

28. Bestimmen Sie die Mellin-Transformierte von $x - \log(1+x)$.

29. Geben Sie eine Funktion an, deren Mellin-Transformierte $1/(s(s+1))$ ist.

30. In der Vorlesung wurde (über die Euler-Maclaurinsche Summenformel) bewiesen, dass für $\operatorname{Re} s \geq 0$
$$\Gamma(s) = \Theta\left(s^{s-1/2}e^{-s}\right)$$
gilt. Bauen Sie diesen Beweis aus, um zu zeigen, dass
    (a) $\log\Gamma(s) \sim -\operatorname{Log} s + \left(s+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(s+1) - (s+1) + \operatorname{Log} C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{(s+1)^{2k-1}}$ für eine passende Konstante C (die Sie hier noch nicht bestimmen sollen) und für $\operatorname{Re} s \geq 0$ und $|s| \to \infty$.
    (b) $\log\Gamma(s) \sim \left(s-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} s - s + \operatorname{Log} C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{s^{2k-1}}$ für $\operatorname{Re} s \geq 1$ und $|s| \to \infty$.
    (c) Dasselbe, aber für $\operatorname{Re} s \geq 0$.
    (d) $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s}\left(1 + \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + O(s^{-3})\right)$ für $|\operatorname{Arg}(s)| < \pi - \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ (Funkionalgleichung verwenden!).

31. Geben Sie eine asymptotische Entwicklung von H_n über die Euler-Maclaurinsche Summenformel an.

32. Bestimmen Sie $\zeta(2n)$ für $n \in \mathbb{N}$ aus den in der Vorlesung bewiesenen Resultaten.

33. Bestimmen Sie alle Pole der Hurwitzschen Zeta-Funktion $\zeta(s;\alpha)$ samt den Hauptteilen. Bestimmen Sie weiters $\zeta(-n,\alpha)$ für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

34. Bestimmen Sie eine asymptotische Entwicklung für die harmonischen Zahlen über die Mellin-Transformierte von
$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$
Hinweis: $h(n) = ?$

35. Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass
$$\int_0^{\infty} \frac{\log^{\ell}(1+x)}{x(1+x)}\, dx = \ell!\zeta(\ell+1).$$

36. Bestimmen Sie eine Entwicklung von
$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-x2^k}$$
um $x = 0$.

37. Bestimmen Sie
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(-1/4)} \zeta(s) \frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}} N^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)}$$
durch Entwicklung des ersten Nenners in eine geometrische Reihe und Verschieben des Integrationsweges auf $\sigma = 2$ und Anwenden der Mellin-Perron-Summation.

38. Zum Abschluss: Harmonische Zahlen über Mellin-Perron.

    (a)
    $$H_N = N + 1 - \int_{(2)} A(s) N^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)},$$
    wobei
    $$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^{s+1}}.$$

    (b) Integration nach $\sigma = -3/2$ verschieben und Residuen sammeln. (Warum geht das?)