Zusammenfassung der Eigenschaften der Γ-Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 0. \tag{1}$$

Durch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{bzw.} \quad \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \tag{2}$$

gelingt die analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Zahlenebene (mit Ausnahme der Pole in $s = -n, n \in \mathbb{N}_0$. Ebenso gelingt dies durch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{3}$$

$\Gamma(s)$ ist eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion mit einfachen Polen mit Residuum $\frac{(-1)^n}{n!}$ in den Punkten $s = -n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. $\Gamma(s)$ hat keine Nullstellen (dies folgt aus der Funktionalgleichung (3)). Die Mittag-Leffler-Zerlegung von Γ lautet

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+s)n!} + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \tag{4}$$

wobei das Integral eine ganze Funktion definiert. Für $1/\Gamma$ kann die folgende Produktdarstellung angegeben werden

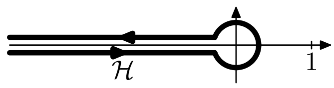
$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{n}\right) \exp\left(-\frac{s}{n}\right). \tag{5}$$

Dabei bezeichnet γ die Euler-Mascheronische Konstante

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N.$$

Ebenso gilt die Hankelsche Integraldarstellung

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} e^z \frac{dz}{z^s}, \tag{6}$$



wobei das Integral über die Hankelsche Kontur $\mathcal{H}$ zu erstrecken ist. Durch logarithmische Differenziation von (5) erhält man

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{n}\right). \tag{7}$$

Für das Verhalten der Γ-Funktion für $|s| \to \infty$ gilt die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \text{ für } |\operatorname{Arg} s| \le \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Für festes $\sigma \in \mathbb{R}$ gilt für $|t| \to \infty$

$$|\Gamma(\sigma + it)| \sim \sqrt{2\pi}\, |t|^{\sigma - \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}. \tag{9}$$

Einige spezielle Werte:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \Gamma'(1) = -\gamma,\ \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\log 2).$$

Zusammenfassung der Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 1. \tag{10}$$

Für die Riemannsche ζ-Funktion gilt für $\operatorname{Re} s > 1$ die Eulersche Produktdarstellung

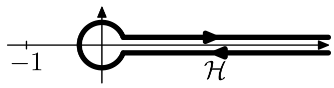
$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \tag{11}$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist. Dies ist eine Konsequenz aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung der ganzen Zahlen. Aus der Integraldarstellung

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \tag{12}$$

leitet man die Hankelsche Integraldarstellung her

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \tag{13}$$



Diese dient zur analytischen Fortsetzung der ζ-Funktion in die gesamte komplexe Zahlenebene. $\zeta(s)$ ist eine meromorphe Funktion mit einem einfachen Pol mit Residuum 1 in $s = 1$.
Es gilt die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s). \tag{14}$$

Die Entwicklung um $s = 1$ hat die Gestalt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n (s-1)^n$$

$$\text{mit} \quad \gamma_n = \lim_{K \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log K)^{n+1}}{n+1} \right). \tag{15}$$

Einige spezielle Werte:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},\ \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi,\ \zeta(-2n) = 0,\ \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n},\ \zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\,|B_{2n}| \tag{16}$$

für $n \in \mathbb{N}$, wobei B_n die durch

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

definierten Bernoulli-Zahlen bezeichnet; insbesondere gilt:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \ \ldots$$

Für $\zeta(2n+1)$ ist keine geschlossene Formel bekannt. Man weiß nur: $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.
Die Punkte $s = -2n$ mit $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man als die trivialen Nullstellen. Alle anderen Nullstellen müssen im Streifen $0 < \operatorname{Re} s < 1$ liegen. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle diese Nullstellen den Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Dies hätte viele Konsequenzen in der analytischen Zahlentheorie.