

Sattelpunktmethode

$$\int_A^B F(z) dz; F = e^f. C = C^{(0)} \cup C^{(1)}; f'(\zeta) = 0$$

SP1. Tails pruning

$$\int_{C^{(1)}} F(z) dz = o\left(\int_C F(z) dz\right).$$

SP2. Central approximation

$$f(z) = f(\zeta) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(z - \zeta)^2 + O(\eta_n)$$

mit $\eta_n \rightarrow 0$ gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$ und $z \in C^{(0)}$.

SP3. Tails completion

$$\begin{aligned} \int_{C^{(0)}} e^{\frac{1}{2}f''(\zeta)(z-\zeta)^2} dz &\sim \varepsilon i e^{-i\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|f''(\zeta)|x^2/2} dx \\ &= \varepsilon i e^{-i\alpha/2} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\zeta)|}}, \end{aligned}$$

wobei $f''(\zeta) = e^{i\alpha}|f''(\zeta)|$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Resultat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A^B e^{f(z)} dz \sim \varepsilon e^{-i\alpha/2} \frac{e^{f(\zeta)}}{\sqrt{2\pi|f''(\zeta)|}} = \pm \frac{e^{f(\zeta)}}{\sqrt{2\pi f''(\zeta)}}.$$

Mellin-Transformation: Eigenschaften

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s} ds$$

$f(x)$	$f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$
Linearkombination	Linearkombination	
$x^k f(x)$	$f^*(s+k)$	$\langle \alpha - k, \beta - k \rangle$
$f(x^\rho)$	$\frac{1}{\rho} f^*\left(\frac{s}{\rho}\right)$	$\langle \rho\alpha, \rho\beta \rangle$
$f(\mu x)$	$\mu^{-s} f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$
$f(x) \log x$	$\frac{d}{ds} f^*(s)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$
$x \frac{d}{dx} f(x)$	$-s f^*(s)$	$\langle \alpha', \beta' \rangle = \text{Durchschn. FS } f(x), x \frac{d}{dx} f(x)$

$\mu > 0$

Korrespondenz $f(x)$ und $f^*(s)$

$f(x)$	$f^*(s)$
$f(x) = O(x^\alpha)$ für $x \rightarrow 0$	Linker Rand $-\alpha$ des FS
$f(x) = O(x^\beta)$ für $x \rightarrow \infty$	Rechter Rand $-\beta$ des FS
Entwicklung bis $O(x^\gamma)$ für $x \rightarrow 0$	Merom. Forts. bis $\text{Re } s > -\gamma$
Entwicklung bis $O(x^\delta)$ für $x \rightarrow \infty$	Merom. Forts. bis $\text{Re } s < -\delta$
Term $x^k \log^\ell x$ bei $x = 0$	Pol mit Sing. El. $\frac{(-1)^\ell \ell!}{(s+k)^{\ell+1}}$
Term $x^k \log^\ell x$ bei $x = \infty$	Pol mit Sing. El. $-\frac{(-1)^\ell \ell!}{(s+k)^{\ell+1}}$

Euler-Maclaurinsche Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{f(b) + f(a)}{2} \\ &+ \sum_{k=1}^K \frac{B_{2k}}{(2k)!} \cdot (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) \\ &- \frac{1}{(2K+1)!} \int_a^b f^{(2K+1)}(x) B_{2K+1}(\{x\}) dx \end{aligned}$$

Hier sind $B_n(x)$ die Bernoulli-Polynome

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

mit $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ und $B_n(1) - [n = 1] = B_n(0) = B_n$.

