Stirling: $\Gamma(s) = \Theta\left(s^{s-1/2} e^{-s} \right).$

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2} \zeta(s).$$

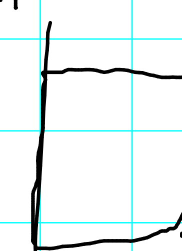
$$\zeta(s,\alpha) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left(\sin\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\alpha n)}{n^{1-s}} + \cos\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\alpha n)}{n^{1-s}} \right)$$

Abschätzungen für $\zeta(s,\alpha)$

Absch. für $\text{konst} \le \sigma \le \text{konst}$, $|t| \to \infty$

ζ

$$\zeta(s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi}{2}s = 2^{s-1}\pi^{s}\zeta(1-s)$$



Behauptung:

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(\alpha+n)^s} - \frac{1}{(1-s)(N+\alpha)^{s-1}} - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(s), \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

wobei

$$f_n(s) = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(n+1+\alpha)^{s-1}} - \frac{1}{(n+\alpha)^{s-1}}\right) - \frac{1}{(n+1+\alpha)^s}$$

$$= s \int_n^{n+1} \frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\, dx .$$

$$- \frac{1}{(1-s)(N+\alpha)^{s-1}} - \frac{1}{s-1}\left(-\frac{1}{(N+\alpha)^{s-1}}\right) + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+1+\alpha)^s}$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+1+\alpha)^s} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}$$

$$\frac{1}{(n+1+\alpha)^{s-1}} - \frac{1}{(n+\alpha)^{s-1}}\Big) - \frac{1}{(n+1+\alpha)^s}$$

$$\frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\, dx .$$

$$f_n(s) = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(n+1+\alpha)^{s-1}} - \frac{1}{(n+\alpha)^{s-1}}\right) - \frac{1}{(n+1+\alpha)^{s}}$$

$$= s\int_n^{n+1} \frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\,dx$$

$$s\int_n^{n+1} \frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\,dx = s\int_n^{n+1} \frac{\cancel{x+\alpha}}{(x+\alpha)^{s+1}}\,dx - (\alpha+n)\,s\int \frac{dx}{(x+\alpha)^{s+1}}$$

$$= \frac{s}{s-1}\,\frac{-1}{(\cancel{x}+\alpha)^{s-1}}\Bigg|_n^{n+1} + (\alpha+n)\,\frac{1}{(x+\alpha)^{s}}\Bigg|_n^{n+1} =$$

$$= \frac{s}{s-1}\left(\frac{1}{(\alpha+n)^{s-1}} - \frac{1}{(\alpha+n+1)^{s-1}}\right) + (\alpha+n)\left(\frac{1}{(\alpha+n+1)^{s}} - \frac{1}{(\alpha+n)^{s}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+\alpha)^{s-1}}\underbrace{\left(\frac{s}{s-1} - 1\right)}_{\frac{1}{s-1}} + \frac{1}{(\alpha+n+1)^{s-1}}\left(-\frac{s}{s-1} + \frac{\alpha+n+1-1}{\alpha+n+1}\right)$$

$$1 - \underbrace{\frac{s}{s-1}}_{\frac{1}{1-s}} \cancel{+} \frac{1}{\alpha+n+1}$$

Übung:

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(\alpha+n)^s} - \frac{1}{(1-s)(N+\alpha)^{s-1}} - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(s),$$

Re $s > 1$

wobei

$$f_n(s) = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{(n+1+\alpha)^{s-1}} - \frac{1}{(n+\alpha)^{s-1}}\right) - \frac{1}{(n+1+\alpha)^s}$$

$$= s \int_n^{n+1} \frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\, dx .$$

Wir wollen das zur analytischen Fortsetzung auf Re $s > 0$ nutzen.

$$\left| s \int_n^{n+1} \frac{x-n}{(x+\alpha)^{s+1}}\, dx \right| \leq |s| \int_n^{n+1} \frac{1}{(x+\alpha)^{\sigma+1}}\, dx$$

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{(x+\alpha)^{\sigma+1}}\, dx \quad \text{konvergiert}$$

Die hintere Summe ist abs. kvgt für ~~Re~~ $\sigma > 0$

$$\mathcal{M}(x - \log(1+x)) = \left[-\Gamma(s-1)\cdot\Gamma(1-s)\right] = -\frac{\pi}{s\cdot\sin(\pi s)}$$

$\langle -2, -1 \rangle$

29. (JAN)

$$\frac{1}{s(s+1)} = \mathcal{M}\left(x \mapsto \begin{cases} 1-x & 0<x<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right)$$

$$|\zeta(s,\alpha)| \le \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+\alpha)^{\sigma}} + \left| \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{(N+\alpha)^{\sigma-1}} \right| + |s| \int_N^{\infty} \frac{1}{(x+\alpha)^{\sigma+1}}\,dx$$

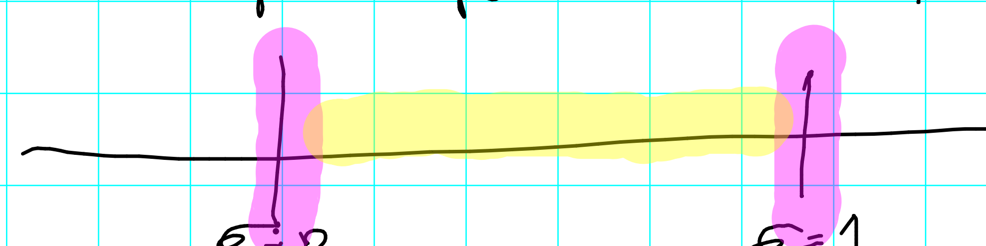
σ in festem Bereich, $|t| \to \infty$. $\qquad$ $\operatorname{Re} \sigma > 0$

Wähle $N = \lfloor |t| \rfloor$

$$\Rightarrow |\zeta(s,\alpha)| \le \alpha^{-\sigma} + \int_0^N \frac{dx}{(x+\alpha)^{\sigma}} + O\left(\frac{1}{|t|} \cdot \frac{1}{|t|^{\sigma-1}} \right) + |t|\, O\left(\frac{1}{|t|^{\sigma}} \right)$$

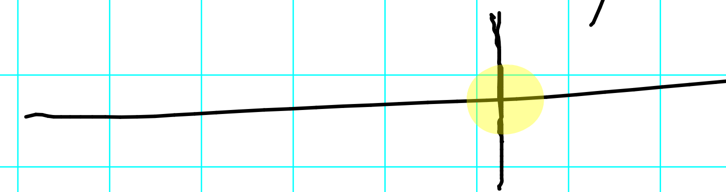
$$= O(1) + \int_0^N \frac{dx}{(x+\alpha)^{\sigma}} + O\left(|t|^{1-\sigma} \right)$$

Fall 1 $\qquad \delta \le \sigma \le 1-\delta$ für festes $\delta > 0$.



$$|\zeta(s,\alpha)| \le O(1) + \frac{1}{\sigma-1} \frac{1}{(x+\alpha)^{\sigma-1}} \Big|_0^N + O\left(|t|^{1-\sigma} \right)$$

$$= O\left(|t|^{1-\sigma}\right). \qquad = O(|t|)$$



$\sigma = 1$

Fall 2 $\quad 1-\delta \le \sigma \le 1+\delta$

$$= O(1) + \int_0^N \frac{dx}{(x+\alpha)^\sigma} + O\left(|t|^{1-\sigma}\right)$$

$$(x+\alpha)^\sigma \ge \alpha^{\sigma-1}(x+\alpha)^1 \qquad \text{für } \sigma \ge 1$$

$$(x+\alpha)^\sigma \ge (\alpha+N)^{\sigma-1}(x+\alpha)^1 \qquad \sigma \le 1$$

$$\int_0^N \frac{dx}{(x+\alpha)^\sigma} \le \left(\alpha^{1-\sigma} + (\alpha+N)^{1-\sigma}\right)\int_0^N \frac{dx}{(x+\alpha)} = O\left(|t|^{1-\sigma}\log|t|\right)$$

Fall 3 $\quad 1+\delta \le \sigma$

$$\left|\sum \frac{1}{(n+\alpha)^s}\right| \le \sum \frac{1}{(n+\alpha)^{1+\delta}} = \zeta(1+\delta) = O(1).$$

Lemma Sei $\delta > 0$ fest. Dann gilt

$$|\zeta(s,\alpha)| = \begin{cases} O(|t|^{1-\sigma}) & \text{für } \delta \leq \sigma \leq 1-\delta \\ O(|t|^{1-\sigma}\log|t|) & \text{für } 1-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta \\ O(1) & \text{für } \sigma \geq 1+\delta. \end{cases}$$

Beweis siehe oben.

Weiter nach links über die Funktionalgleichung: $(\alpha = 1)$

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\zeta(s).$$

Setze s mit $\sigma > 0$ $1-\sigma < 1$

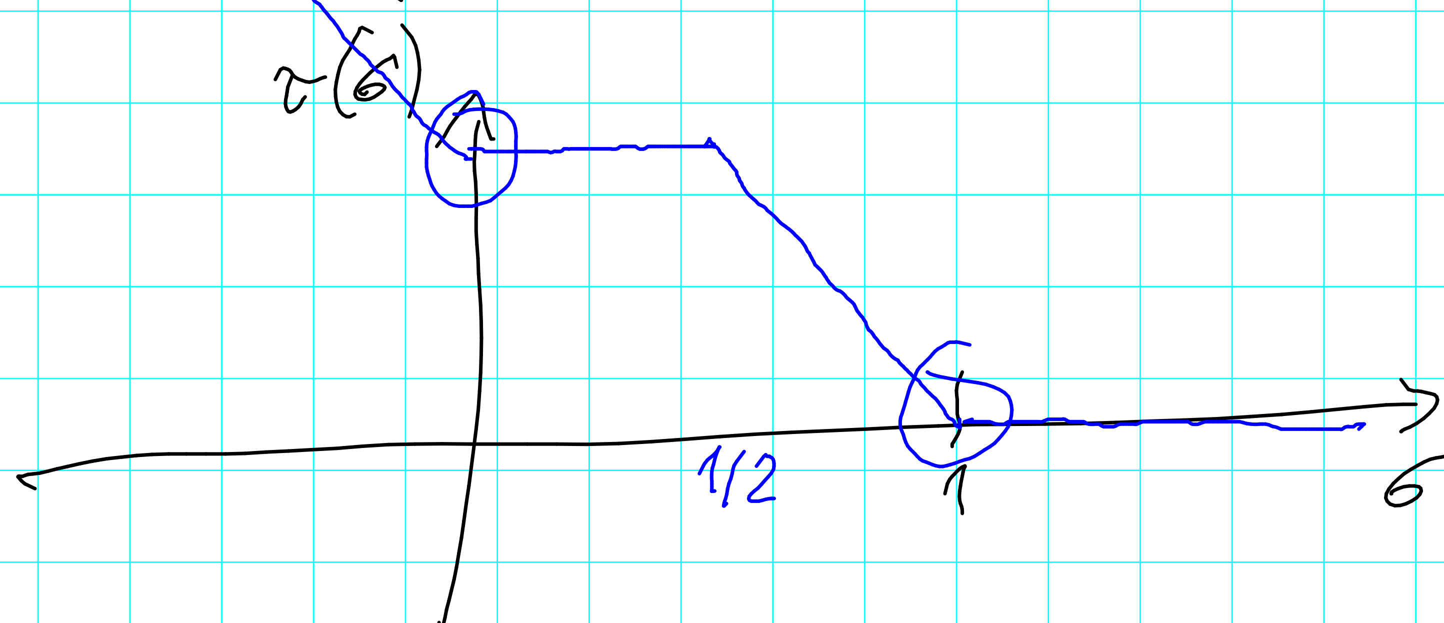
...

Satz $|\zeta(s,\alpha)| = O(|t|^{\tau(\sigma)}\log|t|)$

$$\tau(\sigma) = \begin{cases} 1/2 - \sigma & \ldots \quad \sigma \le 0 \\ 1/2 & 0 \le \sigma \le 1/2 \\ 1-\sigma & 1/2 \le \sigma \le 1 \\ 0 & \sigma \ge 1 \end{cases}$$

$\log|t|$ ist nur in Umgebung von $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ erforderlich

<u>Beweis</u> für $\alpha = 1$ aus Funktionalglg, $0 < \alpha < 1$ vgl. Whittaker-Watson § 13.51,



zurück zu 5.3.

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \, g(\mu_k x) \qquad \mu_k \nearrow \infty$$

erhoffen. $G^*(s) = \Lambda(s) \cdot g^*(s)$, wobei $\Lambda(s) = \sum \lambda_k \mu_k^{-s}$.

Dirichlet-Reihe.

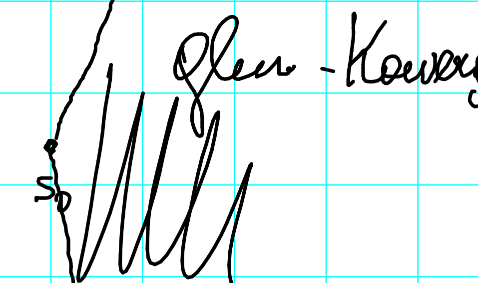
Satz 5.6 (Konvergenzverhalten und Abschätzungen für Dirichlet-Reihen).

Sei $\Lambda(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k^{-s}$ $\qquad \mu_k \nearrow \infty$

Die Reihe konvergiere für ein s_0.

1) Für ~~ein~~ jedes beliebige $\alpha > 0$ konvergiert dann $\Lambda(s)$ gleichmäßig für

$$|\arg(s - s_0)| \le \frac{\pi}{2} - \alpha.$$



Insbesondere konvergiert $\Lambda(s)$ für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$.

2) Sei $\sigma_1 > \operatorname{Re} s_0$. Dann gilt für $\operatorname{Re} s \geq \sigma_1$:

$$|\mu(s)| = O(|s|+1).$$

<u>Beweis</u> OBdA: $s_0 = 0$. $\left(\text{Schreibe } \sum \lambda_k \mu_k^{-s} = \sum \left(\lambda_k \mu_k^{-s_0}\right) \mu_k^{-(s-s_0)}\right)$.

Abel-Summation.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{l=m}^{k} a_l}_{A_{m,k}} - \underbrace{\sum_{l=m}^{k-1} a_l}_{A_{m,k-1}} \Big) b_k =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \left(A_{m,k} - A_{m,k-1}\right) b_k =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} A_{m,k} b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_{m,k} b_{k+1} =$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_{m,k} \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_{m,n} b_n$$

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda_k \mu_k^{-s} = \sum_{k=m}^{n-1} (\lambda_m + \dots + \lambda_k) \cdot (\mu_k^{-s} - \mu_{k+1}^{-s}) + \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k\right) \mu_n^{-s}.$$

$$\left| \quad \right| \le \sum_{k=m}^{n-1} |\lambda_m + \dots + \lambda_k| \, |\mu_k^{-s} - \mu_{k+1}^{-s}| + \left|\sum_{k=m}^{n} \lambda_k\right| \mu_n^{-6}$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ konvergiert, gilt $|\lambda_m + \dots + \lambda_k| < \varepsilon$ für alle m groß genug.

$$\int_{\log \mu_k}^{\log \mu_{k+1}} s e^{-us} \, du = \left| \begin{matrix} us = w \\ s\, du = dw \end{matrix} \right| = \int e^{-w} dw = -e^{-w} = -e^{-us} \Big|_{\log \mu_k}^{\log \mu_{k+1}} = \mu_k^{-s} - \mu_{k+1}^{-s}$$

$$\left|\mu_k^{-s}-\mu_{k+1}^{-s}\right| \leq \int_{\log\mu_k}^{\log\mu_{k+1}} |s|\, e^{-u\sigma}\, du = \frac{|s|}{\sigma}\cdot\int \sigma e^{-u\sigma}\, du$$

$$= \frac{|s|}{\sigma}\left(\mu_k^{-\sigma}-\mu_{k+1}^{-\sigma}\right)$$

$$\frac{|s|}{\sigma} \overset{\text{Hypot.}}{\underset{\text{Winkelfeld}}{=}} \frac{1}{\cos \arg s} = O(1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\lambda_k\mu_k^{-s}\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1}\left|\lambda_m+\dots+\lambda_k\right|\left|\mu_k^{-s}-\mu_{k+1}^{-s}\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=m}^{n}\lambda_k\right|\mu_n^{-\sigma}$$

$$\leq \varepsilon\cdot\left(\frac{|s|}{\sigma}\sum_{k=m}^{n-1}\underbrace{\left(\mu_k^{-\sigma}-\mu_{k+1}^{-\sigma}\right)}_{\text{Teleskop}}+\mu_n^{-\sigma}\right)$$

$$= \varepsilon\left(\frac{|s|}{\sigma}\left(\mu_m^{-\sigma}-\mu_n^{-\sigma}\right)+\mu_n^{-\sigma}\right) \longrightarrow 0.$$

Das beweist 1.

Für 2. $\quad 1/\sigma = O(1)$, dafür $m=0 \Longrightarrow |\lambda_0+\dots+\lambda_k| = O(1)$

0 verzeiht alles. $\square$

Satz 5.7 Sei $g(x)$ mit Mellintransf. $g^*(s)$ auf Streifen $<\alpha, \beta>$.

$$\Lambda(s) = \sum \lambda_k \mu_k^{-s} \qquad \mu_k \nearrow \infty$$

$\Lambda(s)$ konvergiert für $\sigma > \sigma_c$, wobei $\alpha \leq \sigma_c < \beta$. (Konvergenzabszisse).

Sei $\gamma < \sigma_c$

$\sigma_c < \alpha' < \beta$

Wenn

1) $|\Lambda(s)| = O(|t|^k)$ für konst. k und $|t| \to \infty$ für $\gamma \leq \sigma \leq \alpha'$

2) $|g^*(s)| = O(|t|^{-l})$ für alle l und $\gamma \leq \sigma \leq \alpha'$, $|t| \to \infty$

Dann konvergiert $G(x) = \sum \lambda_k g(\mu_k x)$, besitzt auf $<\sigma_c, \alpha'>$ die Mellin-Transf. $\Lambda(s) g^*(s)$. Die singuläre Entw. von $\Lambda(s) g^*(s)$

in $\langle \gamma, \alpha' \rangle$ lässt sich via converse Mapping in eine asympt. Entw. von $G(x)$ bei 0 ausdrücken.

<u>Beweis</u> $$G_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k\, g(\mu_k x)$$

$$\Lambda_N(s) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k\, \mu_k^{-s}$$

Für endl. Summen gilt alles:

$$G_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \Lambda_N(s)\, g^*(s)\, x^{-s}\, ds \qquad \sigma_c < \sigma < \cancel{\alpha'}$$

$$|\text{Integrand}| = O\left((|s|+1)\, |g^*(s)|\, x^{-\sigma} \right)$$

$$G_N(x) = O\left(x^{-\sigma} \right) \quad \text{für alle } \sigma_c < \sigma < \alpha'$$

Dominierte Konvergenz.

$$G(x) = \lim_{N\to\infty} G_N(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \Lambda(s)\, g^*(s)\, x^{-s}\, ds$$

mit $G_N(x) = O\left(x^{-\sigma} \right)$

$\Longrightarrow$ $G(x)$ besitzt Mellin-Transf. auf Streifen $\sigma_c < \sigma < \alpha'$

$$G^*(s) = \int_0^\infty \lim_{N\to\infty} G_N(x) \cdot x^{s-1}\, dx$$

$$\int_0^\infty |G_n(x)|\, x^{\sigma-1}\, dx = \int_0^1 |G_n(x)|\, x^{\sigma-1}\, dx + \int_1^\infty \ldots\, dx$$

$$\leq \int_0^1 x^{-\sigma_c} x^{\sigma-1}\, dx + \int_1^\infty x^{-\alpha'} x^{\sigma-1}\, dx$$

$\Longrightarrow$ dom. Konvergenz.

$$G^*(s) = \Lambda(s)\, g^*(s).$$

Die Wachstumsvor. reichen jedenfalls für ~~Converse~~ Mapping $\Box$

<u>Beispiel 1</u>. (Stirling zum letzten Mal in dieser VO).

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \exp(-s/n).$$

$$-\log \Gamma(x) = \log x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right) \qquad x \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

$x \to \frac{1}{x}$

$$\mathcal{M}(x - \log(1+x)) = \left[-\Gamma(s-1)\cdot\Gamma(1-s)\right]$$

$\langle -2, -1 \rangle$

$$= -\frac{\pi}{s \cdot \sin(\pi s)}$$

$g(x) = \cancel{\log x - x}\ \log(1+x) - x \qquad g^*(s) = \frac{\pi}{s \sin \pi s}$

$$\sin \pi s = \Theta\left(\underbrace{e^{\pm i\pi\sigma + \pi|t|}}\right) = \Theta\left(e^{\pi|t|}\right)$$

$\Rightarrow$ $g^*(s)$ hat passendes Wachstum.

$\mu_n = \frac{1}{n} \qquad \Lambda(s) = \sum n^s = \zeta(-s).$

hat polynomielles Wachstum.

$\Rightarrow$ alle Vor. sind erfüllt.

$\langle -2, -1 \rangle$

$$\Lambda(s)\cdot g^*(s) = \zeta(-s)\frac{\pi}{s \sin \pi s}$$

Pole bei $s = -1$: $\zeta(-s)$ $\quad \sin \pi s \quad$ Ordnung 2

$s = 0$ $\qquad$ $\rightsquigarrow \sin \pi s$ $\qquad$ Ordnung 2

$s \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\sin \pi s$ $\qquad$ $\mathrm{Res} = \zeta(-n)\frac{\pi}{n}(-1)^n$

Fehler

$$\Lambda(s)\, g^*(s) \asymp \sim \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1-\gamma}{s+1}\right) \mp \left(\frac{1}{2s^2} - \frac{\log\sqrt{2\pi}}{s}\right) + \cdots$$

$$\Longrightarrow\; -\log\Gamma(x) = \log x + \gamma x \mp \Big(-x^{+1}\log x \mp x\,(1-\gamma) \mp \tfrac{1}{2}\log x - \log\sqrt{2\pi} \cdots\Big)$$

wo?

$$= -\log x\left(1 \mp x - \tfrac{1}{2}\right) + x - \log\sqrt{2\pi} \cdots$$