Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das nichtlineare Programmierungsproblem (NLP)

Bestimme die Werte von x_1, x_2, ..., x_n sodaß

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ udNB \quad & \\ & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

wobei f und g_i nicht alle linear sind

Bsp.1: Das Produkt-Mix-Problem bei Preiselastizität

Ziel: die optimale Zusammenstellung der Produktionsmengen hinsichtlich der Ressourcen so festzulegen, daß der Gesamtgewinn maximiert wird (zB. siehe Bsp 1, Kap 1).

Fester Gewinn/Einheit $\rightarrow$ lineare Zielfunktion

Preiselastizität: die verkäufliche Produktionsmenge steht in einem umgekehrten Verhältnis zum geforderten Preis

Die Produktionskosten von Produkt j sind c_j. Die verkaufte Menge $D_j(p_j)$ hängt vom Verkaufspreis p_j ab. Welcher Verkaufspreis maximiert den Gewinn?

Entschd.variable: p_j für alle Produkte j;

Netto Gewinn pro verkauftem Stück von Prod. j: $p_j - c_j$

Zielfunktion: $$\max_p \sum_j D_j(p_j)(c_j - p_j)$$

Das Produkt-Mix-Problem bei Preiselastizität (Forts.)

Grund für eine nichtlineare Zielfunktion:
die Grenzkosten für die Herstellung einer Produkteinheit ändern sich mit der Produktionsmenge

(Lernkurveneffekt,Überstundenbetrieb, Einsatz teuerer Produktionsanlagen zur Produktionsausweitung)

Nichtlineare Restriktionen:
Anwesenheit von Büdgetrestriktionen und Kostenfunktion nicht linear; Ressourcenverbrauch ist nicht proportional zur Produktionsmenge

Beispiel 2: Das Transportkostenproblem mit Mengenabhängingen Versandkosten

Gegeben: Ursprungsorte i und ihre Angebote a_i, Bestimmungsorte j und ihre Bedarfmengen b_j, Versandkostenfunktionen $c_{ij}(\cdot)$ pro Paar Urpsungsort-Bestimmungsort (abhängig von der versandten Menge)

Gesucht: Ein optimaler Plan für den Warenversand, der die gesamten Versandkosten minimiert und die Angebot- bzw. Nachfragebedingungen erfüllt.

Entscheidungsvariablen: x_{ij} – Menge die von i nach j versendet wird

Restriktionen: $\sum_j x_{ij} \le a_i,\ \forall i;$ $\sum_i x_{ij} \le b_j\ \forall j,$

Zielfunktion: $\sum_{i,j} c_{ij}(x_{ij})$

Spezialfall: Feste Versandkosten pro transportierter Einheit (unabhängig von der versandten Menge)

$$\Downarrow$$

lineare Zielfunktion (das Transportproblem)

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Beispiel 3: Depotzusammensetzung von nichtfestverzinslichen Wertpapieren

Gegeben: Wertpapier j, $1 \leq j \leq n$,
μ_j und σ_{jj} Erwartungswert bzw. Varianz der Rendite von Wertpapier j
σ_{ij} – Kovarianz zwischen den Renditen von i und j
(σ_{jj} dient als Maß für das Risiko des Wertpapiers j)
P_j – Preis von Wertpapier j
B – zur Verfügung stehendes Büdget

Gesucht: Ein Wertpapierdepot (wieviele Wertpapiere von welcher Sorte), das einen optimalen Trade-off zwischen den erwarteten Rendite und dem Risiko garantiert.

Entschedungsvariablen: x_j - die Anzahl der gekauften Stücke von Wertpapier j.

$R(x) = \sum_j \mu_j x_j$ – Erwartungswert der Gesamtrendite
$V(x) = \sum_{ij} \sigma_{ij} x_i x_j$ – Varianz der Gesamtrendite
($V(x)$ gibt das mit dem Depot verbundene Risiko an)

Zielfunktion: $R(x) - \beta V(x)$ (maximiere)
β – nichnegative Konstante, die den gewünschten Trade-off wiederspiegelt

kleines $\beta \to$ Vernachlässigung des Risiko
großes $\beta \to$ starke Betonung auf die Risikominimierung

Modell:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = R(x) - \beta V(x) \\ udNB & \\ & \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq B \\ & x_j \geq 0\,, \quad 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Nachteil: schwierige Wahl eines guten β

$$\Downarrow$$

parametrisches Programmierungsverfahren

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

NLP versus LP

LP	NLP
zulässiger Bereich (ZB) konvex	ZB nicht unbedingt konvex
$\exists$ eine opt. Lösung, die an einen Eckpunkt des ZB liegt	alle opt. Lösungen liegen möglicherweise im Inneren des ZB (auch wenn ZB konvex)
lokale Optima sind auch globale Optima	$\exists$ lokale Optima, die keine globale Optima sind
Additivitäts- und Proportionalitätsannahme erfüllt	Add.- und Prop.annahme nicht unbedingt erfüllt
effizient lösbar	i.a. nicht effizient lösbar

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Typen nichtlinearer Programmierungsprobleme

1. Optimierung ohne Nebenbedingungen (mit einer oder mehreren Variablen)

2. Optimierung mit linearen Nebenbedingungen

3. Konvexe Programmierung
   alle g_i konvex, f konkav
   Jedes lokale Maximum ist auch ein globales Maximum

4. Quadratische Programmierung
   lineare Nebenbedingugen (alle g_i linear),
   quadratische Zielfunktion ($f(x) = cx - \frac{1}{2}x^t Qx$)

   Spezialfall: f konkav

5. Programmierung bei zerlegbaren Funktionen
   f und g_i sind zerlegbare Funktionen; f konkav und g_i konvex:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f^{(j)}(x_j) \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} g_i^{(j)}(x_j)$$

Erfüllt die Aditivitäts- jedoch nicht die Proportionalitätsannahme

6. Nichtkonvexe Programmierung

7. Geometrische Programmierung
   f und alle g_i haben folgende Form:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i(x) \text{ wobei } P(x) = x_1^{\alpha_{i1}} x_2^{\alpha_{i2}} \ldots x_n^{\alpha_{in}}$$

   Bei $c_i > 0$, $\forall i$, und Minimierungsziel kann dieses Problem in ein konvexes Programmierungsprob-lemm transformiert werden.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Typen nichtlinearer Programmierungsprobleme

8. Quotientenoptimierung

$$\max f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Z.B. $f(x) = \dfrac{cx + c_0}{dx + d_0}$ wobei c, d Zeilenvektoren,

x Spaltenvektor und c_0, d_0 Skalare

Annahme: alle g_i sind linear

Daher folgende Nebenbedingungen: $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

Hilfsvariablen: $y = \dfrac{x}{dx + d_0}$, $t = \dfrac{1}{dx + d_0}$ (d.h. $x = y/t$)

Äquivalente Umformung:

$$\begin{array}{cc} \max & cy + c_0 t \\ udNB & \\ & Ay - bt \leq 0 \\ & dy + d_0 t = 1 \\ & y \geq 0,\ t \geq 0 \end{array}$$

9. Das Komplementaritätsproblem

Seien $w, z \in \mathbb{R}^p$ (Spaltenvektoren) und $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$

Bestimme w und z, sodaß

$$w = F(z), \quad w \geq 0, \quad z \geq 0 \text{ und } w^t z = 0$$

Spezialfall:

Das lineare Komplementaritätsproblem: $F(z) = q + Mz$

($q \in \mathbb{R}^p$ – Spaltenvektor, $M \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$)