Name: **Matrikelnummer:**

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften **22. Mai 2002**

Aufgabe	1	2	3	4	5		
Punkte	4	4	3	3	6		
						=	Punkte

1. Ein Staat entsende R Personen in das amerikanische Repräsentantenhaus. Es gibt D Landkreise in dem Staat ($D > R$) und der Gesetzgeber will nun diese Landkreise zu R unterschiedlichen Wahlbezirken zusammenstellen, welche jeweils einen Delegierten in den Kongreß entsenden. Die Bevölkerung des Staates umfaßt P Personen. Die Legislative will die Bezirke so gestalten, daß deren Bevölkerung ungefähr $p = \frac{P}{R}$ beträgt. Der zuständige Ausschuß zur Untersuchung des Wahlbezirksproblems habe eine lange Liste von N möglichen Kandidaten ($N > R$) aufgestellt. Jeder dieser Kandidaten beinhaltet benachbarte Landkreise und eine Gesamtbewohneranzahl von p_j ($j = 1, 2, \ldots, N$), die ausreichend dicht bei p liegt. Sei $c_j := p - p_j$, für $j = 1, 2, \ldots, N$. Jeder Landkreis i ($i = 1, 2, \ldots, D$) wird mindestens von einem Kandidaten erfaßt, meistens sogar von mehreren (um viele zulässige Alternativen der Zusammenstellung eines Satzes von R Kandidaten zu ermöglichen, welche jeden Landkreis genau einmal enthalten). Man definiert daher

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn Landkreis } i \text{ in Kandidat } j \text{ enthalten ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für gegebene Werte von c_j und a_{ij} sollen nun R der N möglichen Bezirke so gewählt werden, daß jeder Landkreis nur in einem einzigen Bezirk vorkommt und daß das größte damit verbundene c_j so klein wie möglich ist.

Modellieren Sie obiges Problem als ganzzahliges lineares Program.

2. Verwenden sie die KKT-Bedingungen zur Herleitung einer optimalen Lösung für das folgende Problem:

$$\begin{array}{rl} \max & z = x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\ udNB & \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

3. Stellen Sie sich vor, daß das Verfahren der *Programmierung bei zerlegbaren Funktionen* auf ein bestimmtes Problem (das "ursprüngliche Problem") angewendet wurde, um es in das folgende äquivalente lineare Programmierungsproblem umzuwandeln.

$$\begin{array}{rl} \max & z = 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22} \\ udNB & \\ & 3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} \leq 25 \\ & 2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} - x_{21} - x_{22} \leq 10 \\ & 0 \leq x_{11} \leq 2 \\ & 0 \leq x_{12} \leq 3 \\ & 0 \leq x_{13} \\ & 0 \leq x_{21} \leq 3 \\ & 0 \leq x_{22} \leq 1 \end{array}$$

Wie sah das mathematische Modell für das ursprüngliche Problem aus? (Sie können die Zielfunktion entweder algebraisch oder graphisch festlegen, aber die Nebenbedingungen sind algebraisch auszudrücken.)

4. Zu betrachten ist das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ udNB & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines dynamischen Optimierungsansatzes. Um welches bekanntes Problem der Kombinatorischen Optimierung handelt es sich hierbei?

5. Betrachten wir ein Phosphormolekül im Ökosystem einer Weide. Ein im Erdboden befindendes Molekül kann vom Gras absorbiert werden - die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 3/10, oder im Erdboden verbleiben - mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/5, oder außerhalb des Weidenökosystems geraten (z.B. durch die Erosion) - mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/10. Ein im Gras befindendes Molekül kann im Gras verbleiben - mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/5, oder zum Erdboden zurükkehren (z.B. durch den Verfall vom Gras) - mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/10, oder von einer Kuh (mit)gegessen werden - mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2. Ein im Magen einer Kuh befindendes Molekül kann durch die Ausscheidungen der Kuh zum Erdboden zurückkehren - mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/4, bei der Kuh verbleiben - mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/5, oder außerhalb des Weidenökosystems geraten (wenn die Kuh geschlachtet wird) - mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/20.

   - Lässt sich der Weg des Phosphormoleküls im Weidenökosystem mit Hilfe einer Markov-Kette modellieren? Begründen sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten.
   - Identifizieren Sie die transitorischen, rekurrenten und absorbierenden Zustände bzw. Komponente.
   - Bestimmen Sie die Absorptionswahrscheinlichkeit für ein im Gras befindendes Phosphormolekül.
   - Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Schritte, die für die Absorption eines im Gras befindendes Molekül benötigt werden.
   - Angenommen es gibt keine Erosion und es werden keine Kühe geschlachtet. Weiters wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein im Erdboden befindendes Molekül im Erdboden verbleibt um 1/10 steigt und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein im Magen einer Kuh befindendes Molekül im Erdboden gelangt um 1/20 steigt. Ist die Markov-Kette, die diese modifizierte Situation modelliert, ergodisch? Begründen sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten.