Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

5. Übungsblatt

30. Ein Datennetz übertrage binäre Zeichen, 0 oder 1. Mit Wahrscheinlichkeit p werde jedes Zeichen nach der nächsten Wegstufe falsch empfangen. X_0 bezeichne das gesendete Binärzeichen, X_1 das nach der ersten Übertragungsstufe empfangene Binärzeichen, X_2 das nach der zweiten, ... usw. Modellieren Sie den übertragungsvorgang als Markov-Kette und stellen Sie den übergangsgraphen dar. Bestimmen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten.

31. Bestimmen Sie die Äquivalenz-Klassen der Markov-Ketten, die durch folgende Übergangsmatrizen spezifiziert werden. Welche Zustände dieser Markov-Ketten sind rekurrent bzw. transitorisch?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

32. Gegeben sei folgendes Ruinspiel: Eine Spielerin setzt bei jedem Spiel eine Geldeinheit. Ihre Gewinnchance je Spiel beträgt p; ihre Verlustwahrscheinlichkeit ist $q = 1 - p$. Sie spielt solange, bis sie entweder pleite ist, oder einen Gewinn von insgesamt T Geldeinheiten erzielt hat. Sei X_n der Kontostand der Spielerin nach dem n-ten Spiel. Es wird angenommen, daß die Spielresultate voneinander unabhängig sind und der Anfangsbestand der Spielerin X_0 beträgt. Modellieren Sie den Spielvorgang als Markov-Kette und stellen Sie den Übergangsgraphen dar.

    (a) Bestimmen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette.

    (b) Ermitteln Sie die Äquivalenz-Klassen der Markov-Kette.

    (c) Sei $T = 3$ und $p = 0.3$. Berechnen Sie die Absorbtionswahrscheinlichkeiten f_{10}, f_{1T}, f_{20}, f_{2T}.

    (c) Sei $T = 3$ und $p = 0.7$. Berechnen Sie die Absorbtionswahrscheinlichkeiten f_{10}, f_{1T}, f_{20}, f_{2T}.

    Was läßt sich aus (c) und (d) schließen?

33. Im Land der Feuchtigkeit gibt es nur drei Arten von Wetter: regnerisch (R), Schneefall (S) und heiter (H). Betrachten Sie den gerichteten Übergangsgraph aus Abbildung 1.

    (a) Es wird angenommen, daß es derzeit schneit. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der heiteren Tage, die vergehen werden, bevor das Wetter in Dauerregen übergeht.

    (b) Es wird angenommen, daß es derzeit schneit. Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Tage, die vergehen werden, bevor das Wetter in Dauerregen übergeht.

    (c) Angenommen es ist derzeit heiter, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß es jemals in Zukunft regnen wird.

34. Für das Kamera-Beispiel aus der Vorlesung wird folgende Bestellpolitik untersucht: Sinkt der Lagerbestand zum Ende einer Periode unter 2 Einheiten so werden 2 Einheiten bestellt. Im anderen Fall erfolgt keine Bestellung. Sei X_t der Bestand am Ende der Woche t. Nachfrage, die den Bestand übersteigt, geht verloren. Sei der Anfangsbestand durch $X_0 = 0$ gegeben. Sei D_t die Nachfrage in der Woche t, wobei die Zufallsvariablen D_t unabhängig und identisch verteilt sind. (X_t) ist eine Markov-Kette. Es wird angenommen, daß D_t, $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda = 1$ sind. Weiter werden Lagerkosten von 5$ pro lagernder Kamera pro Woche berücksichtigt.

    (a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten.

    (b) Bestimmen sie die langfristig erwarteten durchschnittlichen Kosten je Zeiteinheit.

35. Betrachten Sie die folgende Bestellpolitik für eine ähnliche Situation wie bei dem Kamera-Beispiel aus der Vorlesung. Sei D_i die Nachfrage in der Periode i, $i = 1, 2, \ldots$. Übersteigt die Nachfrage einer Periode den vorhandenen Bestand, so wird die Überschußnachfrage nachgeliefert, sobald die nächste Bestellung eintrifft. Sei Z_n $(n = 0, 1, \ldots)$ der Lagerbestand abzüglich der nicht befriedigten Nachfrage vor Bestellung zum Ende von Periode n $(Z_0 = 0)$. Ist Z_n größer oder gleich null, so bedeutet das, daß in der letzten Periode keine Fehlmenge auftrat. Ist Z_n negativ, dann entspricht $-Z_n$ der Anzahl der nachzuliefernden Einheiten, und der derzeitige Bestand ist null. Gilt $Z_n < 1$ zum Ende der Periode n, so werden $2m$ Einheiten bestellt, wobei m die kleinste ganze Zahl ist, für die $Z_n + 2m \geq 1$ gilt. (Die Bestellmenge ist das kleinste ganzzahlige Vielfache von 2, das den eventuellen negativen Bestand auf mindestens eine Einheit auffüllt.) Die D_n seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die jeden der Werte $0, 1, 2, 3, 4$ mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ annehmen. X_n bezeichne den Bestand am Beginn der Periode n (oder äquivalent, den Bestand nach Eingang der Bestellung am Ende der Periode $n-1$). Überzeugen Sie sich, daß (X_n) eine Markov-Kette mit endlich viele Zuständen ist.

(a) Bestimmen Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtswahrscheinlichkeiten.

(c) Es werden Bestellkosten, Lagerhaltungskosten und Fehlmengenkosten berücksichtigt. Im Falle einer Bestellung von $2m$ Einheiten lauten die Bestellkosten $2 + 2m$, sonst fallen keine Bestellkosten an. Die Lagerhaltungskosten je Periode betragen Z_n für $Z_n \geq 0$ und null sonst. Die Fehlmengenkosten je Periode seien $-4Z_n$ für $Z_n < 0$ und null sonst. Berechnen Sie die langfristig erwarteten Durchschnittskosten je Periode.

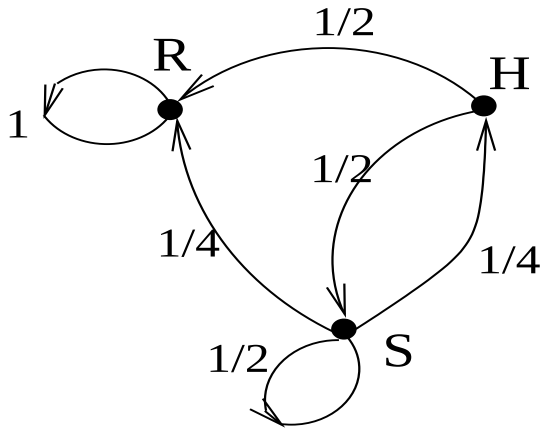

Abbildung 1