Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001
4. Übungsblatt

23. Betrachten Sie eine Situation in der 5 Gegenstände in einem Schief geladen werden können. Die nachfolgende Tabelle gibt das Gewicht w_i (in Tonen), das Volumen v_i (in Kubikmeter) und den Nutzen r_i von jedem Gegenstand i, $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$, an. Es gibt 4 Exemplare von Gegenstand 1 und 5 Exemplare von Gegenstand 2; von den anderen Gegenständen stehen beliebig viele Exemplare zur Verfügung. Das Gesamtgewicht des Ladeguts darf 112 Tonen nicht überschreiten. Das Gesamtvolumen des Lageguts darf 109 m^3 nicht überschreiten. Bestimmen Sie einen nutzenoptimalen zulässigen Ladungsplan für das Schief mit Hilfe eines dynamischen Programmierungsverfahren.

Gegenstand i	w_i	v_i	r_i
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

24. **Das Subset-Sum-Problem.** Seien a_1, a_2, ..., a_n positive ganze Zahlen und sei A eine zusätzliche positive ganze Zahl, die im Weiteren Ziel genannt wird. Es wird eine Teilmenge T von $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ gesucht, sodaß die Summe der Elemente in T dem Ziel A möglichst nah kommt ohne es zu überschreiten. Formulieren Sie dieses Problem als spezielles Rucksackproblem. Bestimmen Sie mit Hilfe des Greedy-Algorithmus eine Lösung des Subset-Sum-Problems mit Zahlenmenge $\{80, 66, 23, 17, 19, 9, 21, 32\}$ und Ziel 142. Ist die von Ihnen bestimmte Lösung optimal?

25. Auf einer Baustelle sind sechs Tätigkeiten durchzuführen, für die sechs Arbeiter verfügbar sind. Die folgende Matrix gibt die Arbeitszeit an, die der Arbeiter i für die Tätigkeit j benötigt, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. Ist ein Arbeiter für eine bestimmte Tätigkeit nicht geeignet, wird die Arbeitszeit mit ∞ angegeben. Bestimmen Sie eine Zuordnung, die die Gesamtarbeitszeit minimiert. Verwenden Sie dazu die Ungarische Methode.

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & \infty & 4 & 10 & 3 \\ 9 & 5 & \infty & 5 & 8 & 7 \\ \infty & 4 & 3 & 5 & \infty & 8 \\ 10 & 3 & 6 & 9 & 4 & 3 \\ 11 & \infty & 7 & 4 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 9 & \infty \end{pmatrix}.$$

26. Sie bereiten mit mehreren Freunden ein Lasagne-Essen vor. Die Aufgaben, ihre Zeitdauer (in Minuten) und die durch den zwingenden Ablauf gegebenen Bedingungen sind folgende:

Nr. der Aufgabe	Aufgabe	Zeit	Aufgaben, die schon erledigt sein müssen
1	Kaufen von Mozarella-Käse	30	
2	Schneiden des Mozarellas	5	1
3	Aufschlagen der Eier	2	
4	Vermischen der Eier mit dem Ricotta-Käse	3	3
5	Putzen und schneiden der Pilze und Zwiebeln	7	
6	Kochen der Tomatensauce	25	5
7	Eine große Menge Wasser zum Kochen bringen	15	5
8	Kochen der Lasagne-Nudeln	10	7
9	Herausnehmen und Abschrecken der Nudeln	2	8
10	Vermischen der Zutaten	10	9,6,5,4,2
11	Vorheizen des Ofens	15	
12	Backen der Lasagne	30	10, 11

(a) Zeichnen Sie ein Projektnetzwerk für dieses Problem.

(b) Ermitteln Sie den frühestmöglichen und den spätestmöglichen Zeitpunkt für jedes Ereignis sowie die Pufferzeit für jedes Ereignis und für jede Aktivität. Geben Sie auch den kritischen Weg an.

(c) Wegen eines Telephongesprächs werden Sie für 6 Minuten unterbrochen, als Sie die Zwiebeln und die Pilze putzen und schneiden wollen. Um wieviel verspätet sich das Abendessen? Um wieviel später ist das Essen fertig, wenn Sie nach dem Telefon Gespräch ihre Küchenmaschine verwenden, die das Putzen und Schneiden von Zwiebel und Pilze von 7 auf 4 Minuten verkürzt?

27. Betrachten Sie das Netzwerk aus Abbildung 1. Es wurde die PERT Drei-Punkt-Schätzung durchgeführt. Sie führte zu folgenden Schätzungen für den Erwartungswert und die Varianz der von den Aktivitäten beanspruchten Zeit (in Monaten).

	Aktivitätsdauerzeiten	
Aktivität	geschätzter Erwartungswert	geschätzte Varianz
$1 \to 2$	4	5
$1 \to 3$	6	10
$2 \to 4$	4	8
$2 \to 5$	8	12
$3 \to 4$	3	6
$3 \to 6$	7	14
$4 \to 5$	5	12
$4 \to 6$	3	5
$5 \to 7$	5	8
$6 \to 7$	5	7

Die geplante Fertigstellungszeit beträgt 22 Monate nach dem Projektstart.

(a) Ermitteln Sie unter Verwendung des erwarteten Werts den kritischen Wert für dieses Projekt.

(b) Verwenden Sie den in der Vorlesung beschriebenen Lösungsweg, um die approximative Wahrscheinlichkeit dafür zu ermitteln, daß das Projekt in der geplanten Zeit fertiggestellt wird.

(c) Zusätzlich zu dem kritischen Weg gibt es fünf andere Wege durch das Netzwerk. Berechnen Sie für jeden dieser Wege die approximative Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der Aktivitätszeiten entlang des Weges nicht mehr als 22 Monate beträgt.

28. Betrachten Sie das Projektnetzwerk aus Abbildung 2. Die nachstehende Tabelle gibt für jede Aktivität drei mögliche Aktivitätsdauerzeiten, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 eintreten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß 1-2-4 bzw. 1-3-4 ein kritischer Weg ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide diese Wege kritisch sind? Weiter berechnen Sie für jede Aktivität die Wahrscheinlichkeit, daß diese kritisch ist.

Aktivität	mögliche Zeitdauer		
A	1	9	5
B	6	14	10
C	5	7	6
D	7	9	8

29. Es wird angenommen, daß die geplante Fertigstellungszeit für das in der Vorlesung besprochene Hausbauprojekt auf 40 Tage verkürzt wurde. Deswegen soll mit Hilfe der CPM-Methode der Zeit-Kosten Ausgleichs ermittelt werden, wie das Projekt vorangetrieben werden kann, wenn diese Schranke auf ökonomisch sinnvolle Weise eingehalten werden soll. Die relevanten Daten sind:

Aktivität	normale Zeit	kritische Zeit	normale Kosten in $	kritische Kosten in $
1→ 2	2	1	1800	2300
2→ 3	4	2	3200	3600
3→ 4	10	7	6200	7300
4→ 5	4	3	4100	4900
4→ 6	6	4	2600	3000
1→ 2	2	1	1800	2300
4→ 7	7	5	2100	2400
5→ 7	5	3	1800	2200
6→ 8	7	4	9000	9600
7→ 9	8	6	4300	4600
8→ 10	9	6	2000	2500
9→ 11	4	3	1600	1800
9→ 12	5	3	2500	3000
10→ 13	2	1	1000	1500
12→ 13	6	3	3300	4000

Formulieren Sie das Modell der linearen Programmierung für dieses Problem

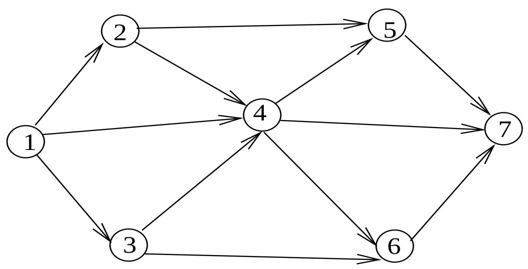

Abbildung 1

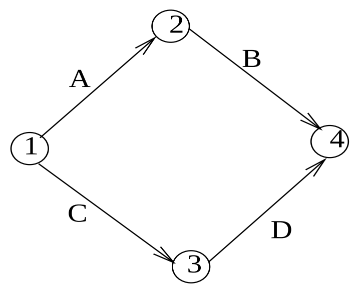

Abbildung 2