Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

3. Übungsblatt

14. Wir möchten ein Investitionsdepot aus zwei Typen von Wertpapieren zusammensetzen. Sei a der Prozentsatz des Investitionsbudgets, der in Wertpapieren vom Typ I investiert wird, und sei $b = 100 - a$ der Prozentsatz des Investitionsbudgets, der in Wertpapieren vom Typ II investiert wird. Die Wahl von a und b bestimmt die Depotzusammensetzung (oder das Portfolio). Die Depotzusammensetzung ist effizient, wenn es keine andere Zusammensetzung gibt, die höhere Durchschnittsrendite und niedrigere Varianz, oder höhere Durchschnittsrendite und dieselbe Varianz, oder dieselbe Durchschnittsrendite und niedrigere Varianz aufweist. Bezeichne μ_1 bzw. μ_2 die Durchschnittrendite von einem Wertpapier des Typs I bzw. II. Sei σ_1 bzw. σ_2 die Varianz der Rendite pro Wertpapier des Typs I bzw. II. Weiters sei σ_{12} die Kovarianz der Rendite für Wertpapiere des Typs I und II. Wenn a% des Budgets in I und b% des Budgets in II investiert wird, dann ist die Varianz der Gesamtrendite folgendermaßen gegeben:
$$a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + 2ab\sigma_{12}\,.$$
Betrachten Sie folgendes NLP:
$$\begin{array}{ll} \max & z = a\mu_1 + b\mu_2 \\ \text{udNB} & \\ & a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2 + 2ab\sigma_{12} \le \nu^* \\ & a + b = 1 \end{array}$$
wobei ν^* eine nichtnegative Konstante ist.

    (a) Zeigen Sie, daß jede optimale Lösung des obigen NLP eine effiziente Depotzusammensetzung beschreibt.

    (b) Zeigen Sie, daß alle effizienten Depotzusammensetzungen generiert werden, wenn ν^* alle nichtnegativen reellen Werte durchläuft.

15. Ein Unternehmen produziert zwei Typen von Computern: A und B. Wenn die Computer vom Typ A und B um p_1 Dollar bzw. p_2 Dollar pro Stück verkauft werden, dann kann das Unternehmen $q_1 = 4000 - 10p_1 + p_2$ Computer vom Typ A und $q_2 = 2000 - 9p_2 + 0.8p_1$ Computer vom Typ B verkaufen. Für die Produktion eines Computers vom Typ A werden 2 Arbeitsstunden und 3 Computer-Chips benötigt. Für die Produktion eines Computers vom Typ B werden 3 Arbeitsstunden und 1 Computer-Chip benötigt. Insgesamt stehen 5000 Arbeitsstunden und 4500 Chips zur Verfügung. Formulieren Sie ein quadratisches Optimierungsmodell, um den Gesamtgewinn des Unternehmens zu maximieren. Verwenden Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bedingungen), um eine optimale Preispolitik zu bestimmen. Welche maximale Summe wäre das Unternehmen bereit für eine Arbeitsstunde bzw. einen Chip zu bezahlen?

16. Betrachten Sie ein NLP, das bis auf Glieder der Form $x_i x_j$ (in der Zielfunktion oder in den Restriktionen) zerlegbar ist. Zeigen Sie, daß ein solches NLP als zerlegbares NLP umformuliert werden kann, in dem man zwei neue Variablen y_i und y_j mit $x_i = (y_i + y_j)/2$ und $x_j = (y_i - y_j)/2$ einführt.

    Verwenden Sie die obengenannte Technik um folgendes NLP
$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 \\ udNB & \\ & x_1x_2 \le 4 \\ & x_1^2 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$
    als zerlegbares NLP zu formulieren.

17. Gegeben sei das folgende NLP

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = x_1 + x_2 \\ \text{udNB} & \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Beweisen Sie, daß dies ein konvexes Optimierungsproblem ist.

(b) Lösen Sie dieses Problem graphish.

(c) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen, um zu beweisen, daß die unter Punkt (b) erhaltene Lösung optimal ist.

18. Gegeben sei das folgende konvexe Programmierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = 10x_1 - 2x_1^2 - x_1^3 + 8x_2 - x_2^2 \\ \text{udNB} & \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen um zu zeigen, daß $(1, 1)$ keine optimale Lösung ist.

(b) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen zur Ableitung einer optimalen Lösung.

19. Gegeben sei das folgende NLP

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = \frac{x_1}{x_2+1} \\ \text{udNB} & \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen um zu zeigen, daß $(4, 2)$ keine Optimale Lösung ist.

(b) Leiten Sie eine Lösung ab, die die KKT-Bedingungen erfüllt.

(c) Zeigen Sie, daß dieses NLP kein konvexes Programmierungsproblem ist.

(d) Benützen Sie trotz der Schlußfolgerung von (c) eine intuitive Begründung, um zu zeigen, daß die in (b) erhaltene Lösung tatsächlich optimal ist.

(e) Nützen Sie die Tatsache, daß dieses Problem ein lineares Quotientenoptimierungsproblem darstellt, um es in ein äquivalentes lineares Programmierungsproblem zu transformieren. Lösen Sie letzteres Problem und ermitteln Sie dadurch die optimale Lösung des ursprünglichen Problems. (Hinweis: Ziehen Sie die Gleichheitsrestriktion in dem LP heran, um eine der Variablen im Modell zu eliminieren. Lösen Sie dann das Problem graphisch.)

20. Gegeben sei das folgende quadratische Problem

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = 8x_1 - x_1^2 + 4x_2 - x_2^2 \\ \text{udNB} & \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen zur Ableitung einer optimalen Lösung.

(b) Es wird unterstellt, daß dieses Problem mit dem modifizierten Simplexverfahren zu lösen ist. Formulieren Sie das LP, das explizit zu bearbeiten ist, und stellen Sie dann die zusätzliche Komplementaritätsrestriktion auf, die vom Algorithmus eingehalten werden sollte.

21. Gegeben sei das folgende konvexe Programmierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) = 4x_1 - 6x_2 - x_1^3 - 2x_2^2 \\ \text{udNB} & \\ & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Beweisen Sie, daß $(2/\sqrt{3}, 3/2)$ eine optimlae Lösung ist, in dem Sie die KKT-Bedingungen zu Hilfe nehmen.

(b) Behandlen Sie dieses Problem als eines der Programmierung bei zerlegbaren Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein mathematisches Näherungsmodell, daß mit dem Simplexverfahren gelöst werden könnte. Benützen Sie die ganzzahligen Werte als Knickstellen der stückweise linearen Funktionen.

22. Die MFG AG stellt eine Baugruppe in jeder der zwei separaten Fabriken her. Die Baugruppen werden anschließend in eine dritte naheliegende Fabrik gebracht, wo sie in die Produktion eines bestimmten Produkts eingehen. Die Hauptsaison der Nachfrage nach diesem Produkt nähert sich, sodaß es notwendig ist, vorübergehend einige Überstunden bei der Baugruppenfertigung zu machen, um die Produktionsrate innerhalb eines gewünschten Bereichs zu halten. Die Kosten pro Baugruppe im regulären Betrieb (RB) und im Überstunden-Betrieb (ÜB) für beide Fabriken sind in der folgenden Tabelle eingetragen, ebenso die maximale Zahl an Baugruppen, die an einem Tag in RB und ÜB produziert werden können.

	Stückkosten		Kapazität	
	RB	ÜB	RB	ÜB
Fabrik 1	15$	25$	2000	1000
Fabrik 2	16$	24$	1000	500

Die Gesamtzahl der pro Tag in Fabrik 1 und 2 erstellten Baugruppen sei durch x_1 bzw. x_2 erfaßt. Es wird unterstellt, daß es das Ziel ist, $Z = x_1 + x_2$ unter Einhaltung der Nebenbedingung, daß die täglichen Gesamtkosten 60000$ nicht überschreiten sollen, zu maximieren. Modellieren Sie dieses Problem mit Hilfe der zerlegbaren Programmierung. Zeigen Sie, daß das von Ihnen entwickelte Modell als lineares Optimierungsproblem umformuliert werden kann.