Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

1. Übungsblatt

1. Gegeben sei folgendes Problem:

$$\textit{minimiere } Z = f(x_1) + f(x_2)$$

mit Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ & - & x_2 & \leq & 1 \end{array},$$

wobei die Funktionen f_1 und f_2 folgendermaßen gegeben sind:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 3x_1 & \text{falls} \quad x_1 \geq 0 \\ x_1 & \text{falls} \quad x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 4x_2 & \text{falls} \quad x_2 \geq 0 \\ 3x_2 & \text{falls} \quad x_2 \leq 0 \end{cases}.$$

   (a) Formulieren Sie für dieses Problem ein lineares Programmierungsmodell.

   (b) Lösen Sie dieses Problem graphisch. Betrachten Sie dabei jeden der 4 Quadranten separat.

2. Die Forschungs- und Entwicklungsabteilung eines Unternehmens hat die Entwicklung von drei neuen Produkten abgeschloßen. Es stellt sich das Problem mit welchem Mix diese Produkte in die Produktion gehen sollen. Das Managment möchte die Entscheidung an drei wesentlichen Faktoren orientieren: dem langfristigen Gewinn, einer gleichbleibenden Beschäftigungssituation und einer Steigerung der Einnahmen des Unternehmens im nächsten Jahr. Als Zielfunktion wird spezifiziert

$$\textit{maximiere } Z = P - 3C - 2D$$

wobei folgendes gilt

P	=	(diskontierter) Gesamtgewinn über die Lebensdauer der neuen Produkte
C	=	Abweichungen (in beiden Richtungen) vom derzeitigen Personalbestand
D	=	Abnahme (wenn überhaupt) der Einnahmen des nächsten Jahres gegenüber dem derzeitigen Niveau.

Eine eventuelle Zunahme der Einnahmen erscheint nicht in Z, da das Managment keine besonderen Präferenzen bezüglich der Höhe eines Einnahmenzuwachses hat; es reicht aus, überhaupt einen Anstieg zu verzeichnen, um die Aktionäre zufriedenzustellen.

Die Wirkungen der drei neuen Produkte (pro Einheit der Produktionsrate) auf die angesprochenen Faktoren werden in nachstehender Tabelle aufgezeigt:

	Beitrag pro Einheit Produkt				
Faktor	1	2	3	Goal	(Einheit)
Langfristiger Gewinn	20	15	25	keines	(Millionen Dollar)
Beschäftigungsziel	6	4	5	=50	(Hundert beschäftigte)
Einnahmen im nächsten Jahr	8	7	5	$\geq$ 756	(Millionen Dollar)

Formulieren Sie für dieses Problem mit Hilfe des Goal-Programming ein lineares Programmierungsmodell. Weitere, nicht angesprochene Restriktionen brauchen nicht aufgenommen zu werden.

3. Eines der wichtigsten Probleme der Statistik ist die *lineare Regression*. Grob gesprochen geht es bei diesem Problem um die Anpassung einer Geraden an statistischen Daten, die durch die Punkte eines Graphen – (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) – gegeben sind. Wenn wir diese Gerade mit $y = ax + b$ bezeichnen, so lautet die Zielsetzung, die Parameter a und b so zu wählen, daß sich entsprechend

eines vorgegebenen Kriteriums die beste Anpassung an die Punkte ergibt. Als Kriterium dient normalerweise die *Methode der kleinsten Quadrate*. Doch gibt es noch weitere interessante Kriterien, bei denen die lineare Programmierung zur Bestimmung der Werte von a und b herangezogen wird.

Formulieren Sie für jedes der folgenden Kriterien das entsprechende lineare Programmierungsmodell zur Bestimmung der optimalen Werte von a und b:

(a) Die Minimierung der Summe der absoluten Abweichungen der Datenpunkte von der Gerade, d.h.

$$\text{Minimiere } \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_i)| \, .$$

(Hinweis: Dieses Problem läßt sich als ein Problem des Goal-Programming ohne verbindliche Prioritäten verstehen, wobei jeder Punkt der Datenmenge als „Goal“ für die Regressionsgerade aufzufassen ist.)

(b) Die Minimierung der maximalen absoluten Abweichung der Daten von der Gerade, d.h.

$$\text{Minimiere } \max_{i=1,2,\ldots,n} |y_i - (a + bx_i)| \, .$$

4. Ein Betrieb möchte aus mehreren vorhandenen Legierungen eine neue Legierung schmelzen. Die neue Legierung soll 40% Zinn, 35% Zink und 25% Blei enthalten. Die vorhandenen Legierungen haben folgende Zusammensetzung:

	Legierung				
Zusammensetzung	1	2	3	4	5
Prozentsatz Zinn	60	25	45	20	50
Prozentsatz Zink	10	15	45	50	40
Prozentsatz Blei	30	60	10	30	10
Kosten ($/kg)	19	17	23	21	25

Ziel ist es, die Anteile der vorhandenen Legierungen aus der sich die neue Legierung zusammensetzen soll, so festzulegen, daß die Produktionskosten der neuen Legierung minimiert werden. Formulieren Sie für dieses Problem ein lineares Programmierungsmodell.

5. Eine Holzhandlung bedient fünf Märkte, das Holz bezieht sie von drei Lieferquellen. Die Bezugsquellen 1,2 und 3 können im Jahr bis zu 10, 20 bzw. 30 Millionen Kubikmeter Holz liefern. Auf den Märkten 1,2,3,4 und 5 lassen sich jährlich 7, 12, 9, 10 und 8 Millionen Kubikmeter Holz verkaufen.

In der Vergangenheit hat die Holzhandlung ihr Holz mir der Bahn verladen. Aufgrund steigender Frachtkosten soll nun die Alternative einer teilweisen Verschiffung des Holzes untersucht werden. Diese Alternative wäre mit Investitionen für Schiffe verbunden. Die Transportkosten in Tausend Dollar pro Million Kubikmeter sind für jede Route bei Bahnverladung bzw. Verschiffung (wenn möglich) in nachfolgender Tabelle angegeben.

Bezugs-	Kosten pro Einheit bei Bahntransport Markt					Kosten pro Einheit bei Verschiffung Markt				
quelle	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	61	72	45	55	66	31	38	24	-	35
2	69	78	60	49	56	36	43	28	24	31
3	59	66	63	61	47	-	33	36	32	26

Der Investitionsbedarf (in Tausend Dollar) für die Schiffe ergibt sich für jede Route aus nachfolgender Tabelle. Die angegebenen Investitionen sind für jede Million Kubikmeter aufzubringen, die im Jahr mit dem Schiff verschickt wird.

Bezugs-quelle	Investitionen für Schiffe Markt				
	1	3	3	4	5
1	275	303	238	-	285
2	293	318	270	250	265
3	-	283	275	268	240

Unter der Berücksichtigung der erwarteten Lebensdauer eines Schiffes und des Zeitwertes des Geldes entsprechen diese Investitionen gleichmäßigen jährlichen Belastungen von einem Zehntel des in der Tabelle angegebenen Betrags. Für den Kauf von Schiffen können maximal \$ 6750000 aufgebracht werden. Gesucht ist der Transportplan, der die gesamten pro Jahr anfallenden Kosten minimiert, wobei das Investitionsbudget eingehalten und die Nachfrage befriedigt werden muß. Formulieren Sie für dieses Problem ein lineares Programmierungsmodell.

6. Einem Investor stehen zu Beginn der nächsten 5 Jahre jeweils zwei Investitionsalternativen A und B zur Wahl. Jeder Dollar, der zu Beginn eines Jahres in A investiert wird, ergibt zwei Jahre später eine Rückzahlung von \$ 1.40 (damit einen Gewinn von \$ 0.40), die sofort wieder angelegt wird. Jeder Dollar, der zu Beginn eines Jahres in B investiert wird, bringt drei Jahre später \$ 1.70.

   Weiterhin besteht die Möglichkeit, jeweils einmalig in die Alternativen C und D zu investieren. Jeder Dollar, der zu Beginn von Jahr 2 in C investiert wird, ergibt am Ende von Jahr 5 eine Rückzahlung in Höhe von \$ 1.90. In D kann nur zu Beginn von Jahr 5 investiert werden; jeder Dollar erbringt am Ende von Jahr 5 \$ 1.30.

   Das Startkapital des Investors beträgt \$ 50000. Der Investor möchte einen Investitionsplan erstellen, der den bis zum Beginn von Jahr 6 angesammelten Geldbetrag maximiert.