Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Ein Einführungsbeispiel (Beispiel 1)

WyndorGlas AG produziert Fenster und Glastüren und hat 3 Werke.
1. Werk: Alurahmen, 2. Werk Holzrahmen,
3. Werk Glas + Endmontage

2. neue Produkte:
   Prod. 1 – Glastür mit Alurahmen,
   Prod. 2 – holzgerahmtes Fenster.

Werk	benötigte Kapazität (%) je Einheit pro Min. Produkt		verfügbare Kapazität (%)
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Gewinn/Einheit	\$3	\$5	

Frage: Um welche Produktionsraten (pro Min.) sollten die 2 Produkte produziert werden, um den Gewinn (pro Min.) zu maximieren?

x_i – Produktionsrate von Produkt i (pro Min.); $i = 1, 2$

$Z = 3x_1 + 5x_2$ – daraus resultierende Gewinn pro Minute

Kapazitätrestriktionen:

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Das lineare Programmierungsmodell

m begrenzte Ressourcen $1, 2, \ldots, i, \ldots m$ sollen
n konkurrierenden Aktivitäten $1, 2, \ldots, j, \ldots n$ zugeteilt werden

x_j – Niveau der Aktivität j (Entscheidungsvariable)

Z – daraus resultierende Effizienzmaß (Zielfunktion)

c_j – Zunahme von Z, die durch Zunahme von x_j bewirkt wird

b_i – verfügbare Menge von Ressource i

a_{ij} – Menge von Ressource i, die von Aktivität j verbraucht wird

Ressource	Aktivität				verfügbare Menge der Ressourcen
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	b_n
ΔZ/Aktivitätseinheit	c_1	c_2	...	c_n	
Aktivitätsniveau	x_1	x_2	...	x_n	

Bestimme den Niveau jeder einzelnen Aktivität, **sodaß** der Gewinn maximiert wird.

Modell:

$$\begin{gathered} \max\ cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{gathered}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Herleitung des dualen Problems

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">Primales Problem</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">Koeff. von</td><td rowspan="2">rechte Seite</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\dots$</td><td>x_n</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Duales Problem</td><td rowspan="4">Koeff. von</td><td>y_1</td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>$\dots$</td><td>a_{1n}</td><td>$\leq b_1$</td><td rowspan="6">Zielfnk. koeff. (Max.)</td></tr>
<tr><td>y_2</td><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td><td>$\dots$</td><td>a_{2n}</td><td>$\leq b_2$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td></td><td></td><td>$\vdots$</td><td></td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>y_n</td><td>a_{n1}</td><td>a_{n2}</td><td>$\dots$</td><td>a_{nn}</td><td>$\leq b_n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">rechte Seite</td><td>$\vee$</td><td>$\vee$</td><td>$\dots$</td><td>$\vee$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_2</td><td>$\dots$</td><td>c_n</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">Zielfnk.koeff. (Min.)</td><td></td></tr>
</table>

Problem1		Problem2	
Zielfunktion	max	Zielfunktion	min
Restriktion i	$\leq$	Variable i	≥ 0
Restriktion i	$=$	Variable i	Vorzeichen unbeschränkt
Restriktion i	$\geq$	Variable i	≤ 0
Zielfkt.koeff.	c_i	Rechte Seite	c_i
Rechte Seite	b_j	Zielfkt.koeff.	b_j

Symmetrieeigenschaft: Das duale Problem des dualen Problems ist das primale Problem.

Primal-dual-Beziehungen:

primales Problem (max):
x – zulässige Lösung, x^* – optimale Lösung

duales Problem (min):
y – zulässige Lösung, y^* – optimale Lösung

Es gilt: $cx \leq by$ und $cx^* = by^*$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Goal-Programming ohne verbindliche Prioritäten - Beispiel 2

Ein Unternehmen möchte 3 neue Produkte einführen.

Ziele: langfristiger Gewinn $\geq$ \$ 125000000,
konstanter Personalbestand $= 4000$,
Investitionshöhe $\leq$ \$ 55000000

Ziele sind nicht simultan zu erfüllen!
Zielvorstellungen werden nicht eingehalten $\Rightarrow$ Strafpunkte

Faktor	Zielbeitrag pro Einheit Produkt 1	2	3		Goal	(Einheit)	Strafpkt.
Gewinn	12	9	15	$\geq$	125	(Mio. \$)	5
Personal	5	3	4	$=$	40	(100 Beschäft.)	2(+), 4(-)
Investition	5	7	8	$\leq$	55	(Mio. \$)	3

Bestimme die Produktionsmengen der neuen Produkte, **sodaß** die Gesamtanzahl der Strafpunkte minimiert wird.

Entscheidungsvariablen:
x_i - Produktionsrate für Produkt i, $i = 1, 2, 3$.

Gewinnziel: $12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125$
Beschäftigungsziel: $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$
Investitionsziel: $5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55$

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } Z = \quad & 5(12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125)^+ \\ & +2(5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40)^+ \\ & +4(5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40)^- \\ & +3(5x_1 + 7x_2 + 8x_3)^+ \end{aligned}$$

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Goal-Programming mit verbindlichen Prioritäten - Beispiel 3

(Erweiterung des Beispiels Nr. 2)

Prioritätsstufe	Faktor	Goal	Strafpunkte
Erste Priorität	Beschaeftigungsziel	≤ 40	2
	Investitionsziel	≤ 55	3
Zweite Priorität	langfristiger Gewinn	≥ 125	5
	Beschäftigungsziel	≥ 40	4

Sequentielles Verfahren:
1. Stufe:

$$\text{min} \quad Z = 2y_2^+ + 3y_3^+$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_1^+ - y_2^-) = 40$$
$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55$$
$$x_j \geq 0, y_k^+ \geq 0, y_k^- \geq 0, \ \ (j = 1, 2, 3; k = 1, 2)$$

Optimale Lösung: $y_1^+ = y_2^+ = 0$, $Z = 0$.
Es gibt unendlich viele Werte für x_1, x_2, x_3,
die $5x_1 + 3x_2 + 4x - 3 \leq 40$ und $5x_1 + 7x_2 + 8x - 3 \leq 55$ erfüllen.

2. Stufe

$$\text{min} \quad Z = 5y_1^- + 4y_2^-$$

$$12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125$$
$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_2^- = 40$$
$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + y_3^- = 55$$
$$x_j \geq 0, y_k^+ \geq 0, y_k^- \geq 0, \ \ (j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3)$$

Eindeutige optimale Lösung: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$,
$x_3 = 3.75$, $y_1^+ = 0$, $y_1^- = 8.75$, $y_2^- = y_3^- = 0$,
$Z = 43.75$.

Math. Modelle in den Wirtschaftswissenschaften
WS 2000/2001

Noch ein Beispiel zu Problemen der Modellformulierung - Beispiel 4

Wiederverwertung von 4 Sorten Abfallstoffe durch die Herstellung 3 verkaufsfähiger Produkte

Daten für die 3 verkaufsfähigen Produkte

Produkt	Spezifikation	Kosten der Einschmelzung ($/kg)	Verkaufspreis ($/kg)
A	$\leq$ 30% von Material 1 $\geq$ 40% von Material 2 $\leq$ 50% von Material 3	3	8.5
B	$\leq$ 50% von Material 1 $\geq$ 10% von Material 2	2.5	7
C	$\leq$ 70% von Material 1	2	5.5

Daten über die angelieferten Abfallstoffe

Material	Verfügbare Menge pro Woche	Weiterverarbeitungskosten ($/kg)
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

Bestimme:

(a) die zu produzierenden Mengen der einzelnen Produkte

(b) das genaue Mischungsverhältnis der eingesetzten Materialien bei den verschiedenen Produkten

sodaß
der Gewinn (= Einnahmen - Gesamtkosten der Einschmelzung und Weiterverarbeitung) pro Woche maximiert wird.